连续介质力学导论

（第三版）

[美] 冯元桢 著 吴云鹏 等 译

重庆大学出版社

连续介质力学导论

（第三版）

[美]冯元桢 著

吴云鹏 等译

重庆大学出版社

连续介质力学导论
(第三版)
[美]冯元桢 著
吴云鹏 等译
责任编辑 傅昌余 李长惠
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
四川外语学院印刷厂印刷
*
开本:850×1168 1/32 印张:12.125 插页 2 字数:326 千
1997年10月第1版 1997年10月第1次印刷
印数:1—3000
ISBN 7-5624-1447-5/O·150 定价:22.00元

冯元桢教授传略

1941 年，冯元桢（YUAN-CHENG BERTRAM FUNG）于中国国立中央大学获学士学位。1948 年获美国加州福尼亚理工学院博士学位（California，Pasadena）。冯氏早年学术贡献在不定常流体力学、弹性结构稳定性、颤振、动力学等。其成果在他的著作《空气弹性力学》（1956，1969，1993，冯钟越译成中文）、《固体力学基础》（1965，马文华、王开福译成中文）和《连续介质力学导论》（1969，1976 再版，1993 三版，由李松年、马中和译成中文）中有所记载。

1960 年以来，冯元桢博士开创了生物力学的研究。他研究了循环、血管、血细胞、心脏、肺脏以及生长和应力之间的关系。他的意图是对生理学作理性的探索。他有此方面的三部著作：《生物力学：活组织的力学特性》（1981，1993 再版，由戴克刚译成中文）、《生物动力学：循环》（1984，戴克刚译成中文）和《生物力学：运动，流动，应力和生长》（1990 年，邓善熙译成中文）。并著有中文《生物力学》于 1983 年由科学出版社出版。

冯元桢博士曾荣获微循环学会颁发的 EUGENE LANDIS 奖（1975）、美国土木工程师学会颁发的

THEODORE VON KARMAN 奖(1976)、美国机械工程师学会颁发的生物工程 LISSNER 奖、永恒文献突出贡献 WORCESTER WARNER 奖、应用力学的 TIMOSHENKO 奖、ASME 学会百年纪念奖(1981)、最佳生物工程论文奖(1993),以及最佳永恒学术原著奖(1994)。他也获得了国际流变学会的 POISEUILLE 奖。他是 GUGGENHEIM 研究员、美国航空航天研究院评议员、美国机械工程学会评议员、美国国家科学院院士、美国医学科学院高级院士、美国工程院院士、美国生物医学工程院院士及中国科学院外籍院士。他也是中国八个大学及研究院的荣誉教授,他又是台湾中央研究院院士。此外,他先后担任不少专业杂志的主编并发表 297 篇为主要作者的论文。

冯元桢教授一生治学严谨,乐于助人,淡泊名利,勤奋研究,热爱中华,热爱祖国,集东西方优秀文化及优秀个人品质于一身,赢得了海内外学者的广泛尊敬与爱戴。

(冯元桢教授荣获的学术荣誉、发表的论文及著作见附录)

译者的话

1979年，我国刚改革开放不久，为了发展新兴学科，应本书作者冯元桢教授之邀，由重庆大学、华中理工大学及中国科学院力学研究所派出学者赴美国圣·迭戈加州大学生物工程中心学习研究。当我们一踏上大洋彼岸异国国土上，就受到冯教授的盛情接待和耐心帮助指导。同年冬，在作者的主讲下，一个全国性的生物力学及生物流变学讲习班就成功地办起来了。这也意味着，作为生命科学的重要组成部分——生物力学与生物流变学这一新兴交叉学科，在我国开始蓬蓬勃勃地发展起来了。

时光荏苒，17年瞬息驰过。而今，我国的生物力学与生物流变学无论在研究或教学诸方面，不仅已有相当的发展，并且在研究本平及数量上，成就辉煌，令人瞩目。忆昔抚今，我们难以忘怀作者的一贯帮助和学术贡献。

三年前，当我在亚特兰大参加中一日一美生物力学大会后，重返冯教授和钱煦教授所领导的圣·迭戈加州大学生物工程实验室时，冯教授再次将此书的英文原稿慷慨惠予，拜读之后，深感作者不仅系统地而又富有启发性地阐述了连续介质力学的理论和分析方法，而且首次创造性地用于生命现象，启迪读者对生命现象，特别是生

命体现象予以量化分析。的确，本书对于从事生命科学、力学、医学、生物医学工程、定量生理学、……领域内的教学和研究工作者，实在是一部必读的基础科学之作。

我译了序言和第一章，并负责书稿的统稿工作，杨瑞芳译第二、三章，蔡绍皙译第四、五章，王伯初译第六、七章，龙勉译第八、九章，卢晓译第十、十一章，王公瑞译第十二、十三章，此外，蒋稼欢在后期协助我与杨瑞芳参与了部分的翻译与校稿工作。在诸位同仁的努力下，《连续介质力学导论》第三版的中文本已出版。我相信，本书的问世，作者、译者和海内外的广大读者都会为此而欢欣鼓舞。

吴云鹏

于山城重庆

1996年阳春三月

作者序言

我很感谢重庆大学吴云鹏校长及杨瑞芳、王公瑞、蔡绍晢等诸位教授及他们的合作者的努力，使这本书能以中文和大家相见，完成了我从头就有的愿望。

连续体力学是一门发展得相当完整的数学理论，它模拟宇宙间某些物体，用数学概念简化和净化后，得到了一套很美丽的结果，和一套很简洁的方法，可以用来做研究理化及生命科学的工具，并充任工程技术设计的基础，在很多复杂的问题中，把有关力学和变形的一部分弄清楚，其重要性是显而易见的。但是，科学与工程所接触的绝大多数物体的结构，并不符合连续体的数学定义，所以，如何应用连续体力学于科学与工程，是一个重要的实际问题，现在市上所有的别的著作，都不谈这个问题，本书则正视这个问题，着重讨论。

这本书是为了教学而写的，我想借这本书来转移些当前大学生学习的风气，我想鼓励学生们多思考，多发明，多欣赏；少死啃，少背书，不要太忙，要留出时间来独自想想，有许多好学生做很多习题，却没有给自己提出好问题的习惯，没有把自己的问题数学化变成理论，或计划某些实验来寻求解答，我想在教学中改变教师和学生的

习惯，因此，写了这一本简短的力学教本，引读者向自发的路上走，用普通的方法，和较广阔的视野，鼓励学生经常自己出题、自己解答、自己设计实验，养成设计和发明的习惯，特别是让学生养成一种心态、敏感地观察周围事物、寻找发明的机会，以发明为乐，日积月累，水到渠成。

这是我的心意，这心意如能引起教师和同学们一点点共鸣，我就很快乐了。

冯元桢

1995 年 8 月

第三版序言

本版的目的同前版一样，是为了加强力学基础，减少在数学确切描述中的模糊概念，在科学和工程方面提出问题、分析问题以及设计发明的习惯。我很强调应用，在本版更为强调。因此，一开始连续介质即以真实材料定义。通览全书，并无与生物材料相悖之处。生物学为科学，生物工程为工程。力学也不限于物理学之范畴。

在本书中，我常要求读者明确阐明问题、姑不论他们能否解决问题。不少学生曾作了无数作业，但他们自己并不能明确阐明问题的实质。我希望他们能另辟它径来学习，希望由他们自己提出问题、发现问题、解决问题和探求解的准确性。鼓励学生去观察自然，思考工程和科学中的问题，进而作为第一步，写下可能的约束方程和边界条件，得到控制方程，乃本书的首要目的。

本书按如下内容组织。首先解释连续介质的概念，然后就是应力和应变的透彻处理，以及决定主应力和应变的实用技术，相容性的概念在此两章内都予以强调。在第7章中，对理想化的流体和固体予以详细说明。第8章详细阐述了各向同性这一重要概念。第9章则讨论了真实

流体及固体的力学特性，第10章给出了基本的力学守恒定理。第11、12章分别阐述了理想和粘性流体的某些特征，边界层理论，线性弹性理论，弯曲和扭转理论以及弹性波理论。最后一章（第13章）的内容较新，阐述了材料承受应力后的长期改变，以及生物材料的生长和自主重建，这些问题与应力-生长定律有密切联系。

同传统的流体和固体力学教科书中对材料的介绍相比较，第9～13章所介绍的材料在某些方面似乎是标新立异的，然而其罕有的特性表明并非标新立异，诸如血液和油漆这类流体、心脏、肺、肌肉这类固体。而橡胶堪称为既普通而又优越的材料，同时这与学习材料的本构关系并不相悖。

书中很多问题已有叙述，本版又增加了不少新内容，很多内容均涉及问题的阐述、设计和发现、创造。在第2章、第10章，一些特殊部分为训练读者在推导公式诸方面应用的练习。

如果读者能够在本书中得到有关应力、应变和本构方程等方面的明确概念，并且知道如何在描述科学和工程有关问题时去应用它们，则作者将不胜欣慰。



冯元桢教授

目　录

1 导 论

1.1 本教程的目的

我们的目的是学会明确地表述力学中的问题，如何把含糊不清的问题和概念变为准确的数学描述，以及培养在工程上和科研上提问、分析、设计和发明的习惯。

我们先考察这样几个问题：一架飞机在空中飞行。机翼必须承受应变以支持旅客和货物，机翼承受了多少应变？假如你正在驾驶一架滑翔机，面前出现了一块铁砧云，而热气流会把飞行器带到更高的地方。这时你敢不敢飞进云彩里面去呢？机翼有足够的强度吗？你看，前面是金门大桥，它的钢索支持着巨大的载荷。怎样设计这样的钢索呢？云里含有水，田野里需要水。如果播下了云，会产生雨吗？雨会不会降落到需要它的地方呢？降雨量是否足够而又不泛滥？远处有一座核电站，在反应堆里热是怎样传递的？在反应堆里有哪一种热应力？怎样评定核电站的抗震性？地震时，地球会发生什么样的现象？考察地球，你可能会惊奇，陆地为什么会漂浮、运动或裂开？再想想我们自己：我们是怎样呼吸的？如果我们做健身操、做倒立动作，我们的肺脏内部会发生什么样的变化呢？

有趣的是，所有这些问题都关系到力、运动、流动、变形、能量、物质特性、物体之间的相互影响及物体内部各部分之间的相互影响。同时，还涉及到物质永久或暂时、可逆或不可逆的变化。这些

变化同连续介质力学相结合，就可以简化为一定的微分方程和边界条件。求解这些方程，我们可以得到准确的定量数据。在本书中，我们将论述构成这样的微分方程和边界条件的基本原理。虽然一旦列出这些方程后，解这些方程就是我们想做的事，但我们并不详细地讨论它们的解。我们的目的是公式化，即将一般的概念演化为数学形式。

1.2 科学技术中的应用

本书中采用的数学处理，其目的在于为科学和技术服务。为了使学生清楚其应用，书中所列举的例子和解决的问题通常基于科学研究和工程设计。通过经常的实践，由于形成一种习惯，从而使人们在设计发明事物、装置、方法、理论和实验方面的心态都会得到增强。

1.3 什么是力学

力学是研究物质运动(或平衡)，以及引起该运动(或平衡)的力的学科。力学是建立在时间，空间，力，能量以及物质这些概念基础上的。研究物理学、化学、生物学以及工程学的所有分支，都需要力学知识。

1.4 连续介质的模型:经典定义

连续介质的经典概念来自数学。我们讲，实数系是一个连续集。在任意两个不同的实数之间，有另一个不同的实数，因此在任何两个不同的实数之间就有无穷多个实数。把时间用一个实数系 t 来代表，三维空间用三个实数系 x,y,z 来代表。这样就可以把时间和空间看成一个四维的连续集。

将连续集的概念推广到物质，我们可以认为物质在空间是连

续分布的。密度的概念就能最好地说明这一点。如用质量来度量物质的数量，并假定一定的物质充满了一定的空间 $\mathscr{V}_0$，如图 1.1 所示。考察 $\mathscr{V}_0$ 中一点 P，以及收敛于 P 的子空间序列 $\mathscr{V}_1,\mathscr{V}_2,\cdots$：

$$\mathscr{V}_n \subset \mathscr{V}_{n-1}, P \in \mathscr{V}_n, (n = 1,2,\cdots) \qquad (1.4\text{-}1)$$

令 $\mathscr{V}_n$ 的体积是 V_n，$\mathscr{V}_n$ 中所含物质的质量是 M_n，构成比值 M_n/V_n。若 $n \to \infty, V_n \to 0$ 时，M_n/V_n 的极限存在，则此极限值可定义为 P 点处质量分布的密度，用 $\rho(P)$表示：

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ V_n\to 0}} \frac{M_n}{V_n} \qquad (1.4\text{-}2)$$

若在 $\mathscr{V}_0$ 内各处都能这样定义密度，就可以说这个质量是连续分布的。

用类似的方法还可定义动量密度、能量密度等等。如果一个物质的质量、动量、能量密度在数学意义上存在，这个物质就是一个物质连续体，研究这种物质连续体的力学就是连续介质力学。

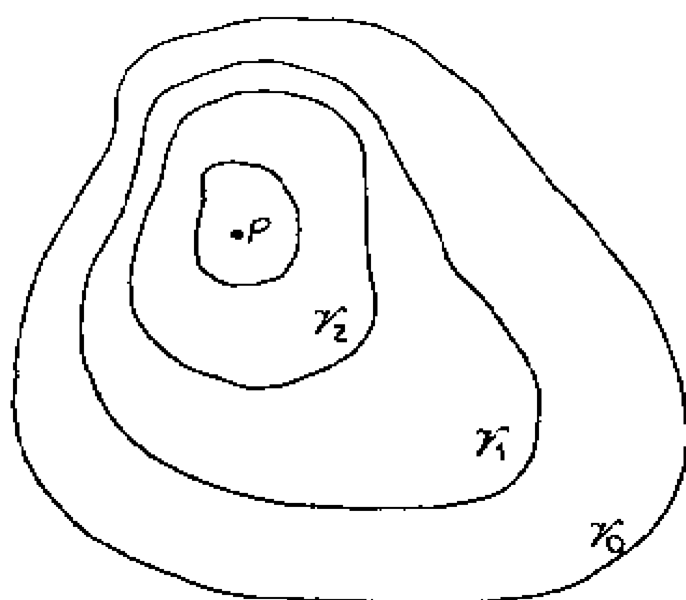


图 1.1　收敛到 P 上的空间域序列

以上是物质连续体的通常定义。但如果我们严格遵从这一定义，在科学和技术中是无法应用它的。因为在真实世界中要满足这一定义是没有意义的。譬如，当气体的体积 V_n 小于其平均自由程时，则不能满足等式(1.4-2)。当流体的体积 V_n 为原子尺度的数量级时，也不能满足上述等式。此外，像多晶金属、复合的纤维状结构、陶瓷、合成塑料均难以满足此条件。活的器官、动物的组织、单个细胞和细胞聚集体也不能满足这些条件。

1.5 我们对连续介质的定义

我们对一个材料定义为连续介质，除了认为 V_n 的大小被约束在边界内，以及物质粒子在实数体系下没有必要一一同构外，其他方面类似于前面所述的经典方法。另外，物质粒子可以是离散的，其间可以有一定的空间。例如对材料的密度而言，考虑空间 $\mathscr{V}_0$ 中的一点 P，同时考察空间 $\mathscr{V}_0$ 的一系列子空间 $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \cdots, \mathscr{V}_n$，其分别对应的体积 $V_1, V_2, \cdots, V_n$，这些空间逐次包容，并且都包容 P 点。当 $n \to \infty$，V_n 的极限趋于一有限正值 ω。令包容于 $\mathscr{V}_n$ 内的质量为 M_n。当变量 ϵ 取值合理，比值 M_n/V_n 序列有一极值 ρ。即当 $n \to \infty$时

$$\left|\rho - \frac{M_n}{V_n}\right| < \epsilon$$

ρ 值可以认为是在极限体积 ω 中，变量 ϵ 取合理值时 P 点的材料密度。

类似地，我们可以根据合理的变量值和极限体积定义每单位体积物质粒子的动量和能量。进而(见 1.6 节)我们将处理作用于物体表面的力，并且还必须考虑物体表面任意一点在极限体积中，取合理变量值时的单位面积作用力是否有极值存在。若存在，其极值可称为牵拉或应力。表面每个方位牵拉的集合称为应力张量。进而在第五章，我们将考虑空间质点间的变化，并定义应变张量。应变分量的存在同其一定的有限长度和合理的变化性有关。

假如清楚地理解了有限长度和合理的变化性，则可定义空间 $\mathscr{V}_0$ 每点的密度、动量、能量、应力和应变，并且如果它们在 $\mathscr{V}_n$ 内为空间坐标的连续函数，我们就可以说 $\mathscr{V}_n$ 内的材料是连续介质。

如果一种材料在经典观念上是连续介质，则以我们的观念亦可定为连续介质。对于经典力学而言，其定义的有限长度、面积和体积以及合理的变化均为零。

在其它连续介质力学书中，作者论及连续介质力学是否对科

学技术有用取决于实验工作者各自的训练。我可以肯定地说，每位实验工作者都清楚经典理论是不实用的。理论工作者的责任是进一步精化理论以更符合真实世界。我们的方法不会适合所有的科学技术领域。详细阐明合理的变化性和尺度定义是我们付出的代价。

1.6 在我们的连续介质定义中的应力概念

考察占据一定空间域 V（图 1.2）的物质 B，想像在 B 内有一封闭曲面 S，并且考虑 S 外边的物质与 S 内部的物质之间的相互作用。令 ΔS 为一个微面元元素，自 ΔS 上一点，作一垂直于 ΔS 的单位向量 $\boldsymbol{\nu}$，其方向由 S 的内部指向外部。因此我们可以根据 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向来区别 ΔS 的两侧。令该法向向量所指向的一侧为正面。考察位于正面的部分物质，这部分物质对位于负侧的另一部分物质的作用力为 $\Delta \boldsymbol{F}$。力 $\Delta \boldsymbol{F}$ 与面积元的位置、大小及法线的方向有关。我们引入假设：当 $\Delta S \to 0$ 时，比值 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta S$ 随着合理的变量 ϵ 而趋于一个确定的极限值 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}/\mathrm{d}S$，并且作用在曲面 ΔS 上的力绕面积内任一点的力矩在极限状态下等于零。极限向量将写为

$$\overset{\nu}{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}S}$$

式中引入的上标 ν 表示面元 ΔS 的法线 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向。极限向量 $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$ 称为牵引力，或应力向量，它代表作用在 S 面上的单位面积的力。

欧拉(Euler)和柯西(Cauchy)应力原理主张：在一个连续介质内部的任何一个闭合曲面 S 上，有一确定的应力向量场，它对 S 内部空间物质的作用，等价于外部物质在它上面的作用。作为一个公理，我们接受了这一作为通则的原理。然而，这只不过是一个基本的简化。例如，没有一个充分的理由来解释为什么曲面面元 ΔS 两边物质的作用力一定是力矩为零。确实有些人不喜欢“作用在曲面 ΔS 上的力，绕面元上任一点的力矩在极限状态下为零”这个有

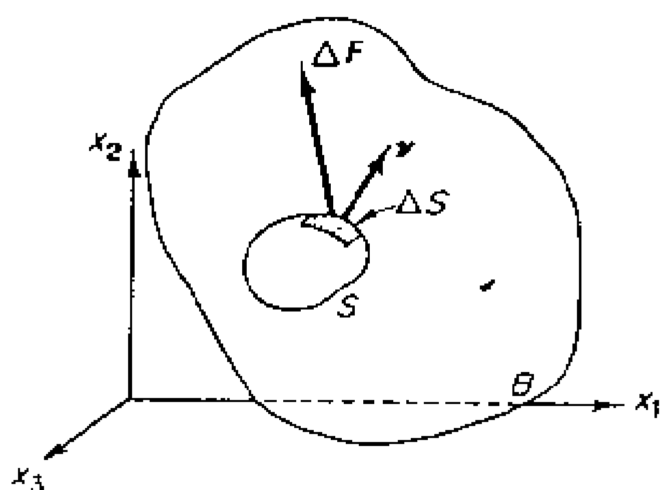


图 1.2 应力原理

限制的概念。他们曾提出一个广义的欧拉和柯西应力原理，即"穿过物质内部任意无穷小面元，外部物质对内部物质的作用等价于一个力和一个力偶矩。"由此所导出的理论要求有偶应力的概念，它比常规理论复杂得多。到目前为止，还没有发现偶应力理论的实际应用。因此，在本书中，我们不再进一步讨论这个问题。

1.7 真实连续介质的抽象复制

一旦确定一个物体可看作为连续介质，根据经典定义，就可对这个真实物体作出一份抽象复制，这种抽象复制物与实数系是同构的。这种抽象复制实际上是对真实物质的理想化，其理想化的法则是：在定义范围内，理想系统的质量密度与真实物质的相同。当一组力同样作用于真实物质系统及其抽象复制物系统上时，除了理想系统可以严格计算，对真实物质的计算需在下边界尺寸上作某种限制以及必须估计统计变异性外，两系统的应力和应变是相同的。真实物质的本构方程被用来描述理想复制物的力学特性，计及误差范围的系统的运动（或平衡）方程、连续方程及能量平衡方程，可适用于对应的真实物质系统。通常有涉及许多对真实物质进行抽象复制主题的文集，其中的结果可供引用。已知的、可获得的变化和所定义的尺度，可使我们估计出真实物质和其抽象复制物间的差别，从而有助于我们深入了解真实系统的行为。

在某种尺度范围内对真实物质作出的抽象复制物的本构方程可能与在另一不同尺度范围内所作出的另一种抽象复制物的本构

方程有所不同。但如果真实材料在相邻的尺寸范围内其本构方程是相同的，则其抽象复制物的本构方程在整个范围内也是同一的。如果真实物质的本构方程在不同的尺寸范围内有所不同，则相邻的不同尺寸范围内的抽象复制物亦具有不同的本构方程。对我们所研究的系统而言，这的确是一种有用的特点。因为这可以使我们识别出一种物体在不同的观察尺度范围内的不同结构，可以使我们在不同的尺度水平上提出不同的问题，从而在总体上得到更好地理解。

在不同观察尺度下所得到的物质本构方程谱系与不同尺度下该物质结构的相似性与否有关。一种物质的结构可能是分形的，即在尺度连续变化时呈现出自相似性，也有可能不是分形。譬如对肺气道的几何形状而言，从最大的支气管到最小的支气管，在结构上是一种分形，从而在这些尺度范围内可望服从相同的本构方程。肺泡管道从呼吸支气管到肺泡囊的结构则是另一种类型的分形。于是，在这种尺度范围内可望用一种不同的本构方程来处理。肺泡小窝—肺泡壁则根本不是分形结构，肺泡壁上的胶原纤维和弹性纤维的结构也不是分形。因此它们的力学特性需要完全不同的描述。

1.8 什么是连续介质力学

在一个封闭面内的连续体，我们称之为物体，这种封闭面可以是真实的，例如人的皮肤和飞机的外壳。但它们也可以想像为空间的一部分。

真实世界的材料将承受作用于其整体上的（如重力、电磁力等）和作用于其表面上的力（如大气压力、风、雨等，这些载荷可被带走并传送到远处）。如果物体在某种意义上是前述的连续体，则我们想要知道的是该物体对外力的反应。决定物体响应外力的内部状态就是连续介质力学。

1.9 连续介质力学定理

我们把物理学定理拿来作为连续介质力学的定理。在本书中特别应用了牛顿运动定律和热力学第二定律。

还有三个连续介质力学附加定理。首先是材料的连续性在力的作用下仍保持其连续性，故在某一时刻的两个相邻质点在所有时间均保持相邻性。我们可以允许物体破裂(亦即可以断裂)，但是其断裂面必然是重新形成的外表面。在生物活体内，我们允许新的生长(即细胞和胞外质量的增加，新的细胞移入体内某个区域，或细胞的分裂增殖)和吸收(即细胞和胞外基质质量的减少，细胞运动到体内某区域外，或细胞死亡被代谢或吸收)。每一次新的生长或吸收将产生一个新的外表面。

连续介质力学的第二定理是应力(如1.6节所述)和应变(如第五章所述)在物体的每一部分均可确定。连续介质力学的第三定理是每一点的应力与同一点的应变和该瞬时的应变率有关。这一定理是一个经过很大简化的假定。它断定在体内任一点的应力仅取决于某时刻该点相邻区域的变形。其应力--应变关系可受其它参数的影响，如温度、电荷、神经脉冲、肌肉收缩、离子传输等，只是这些影响可以分别研究。

1.10 连续体的体系取决于科学研究中对象尺寸的一个生物学例子

我们对用望远镜观察天空和用显微镜观察细胞、组织、金属和陶瓷已十分熟悉。当观察尺度变化时，观察对象亦呈现不同。以人肺脏为例，肺可认为由三套树状管路(即气道树，动脉树和静脉树)及周围组织组成(图1.3)。气道树为通气管路，气管分支为支气管，进入肺部后反复分支形成树状(从统计学上说，人体支气管可分为23级)，分支的直径越来越小，最后分成的最小单位称为肺

泡。图 1.4 是在显微镜下所看到的人的肺泡照片。此图片显示了图 1.3 左图边界上小圆所指那部分情况。

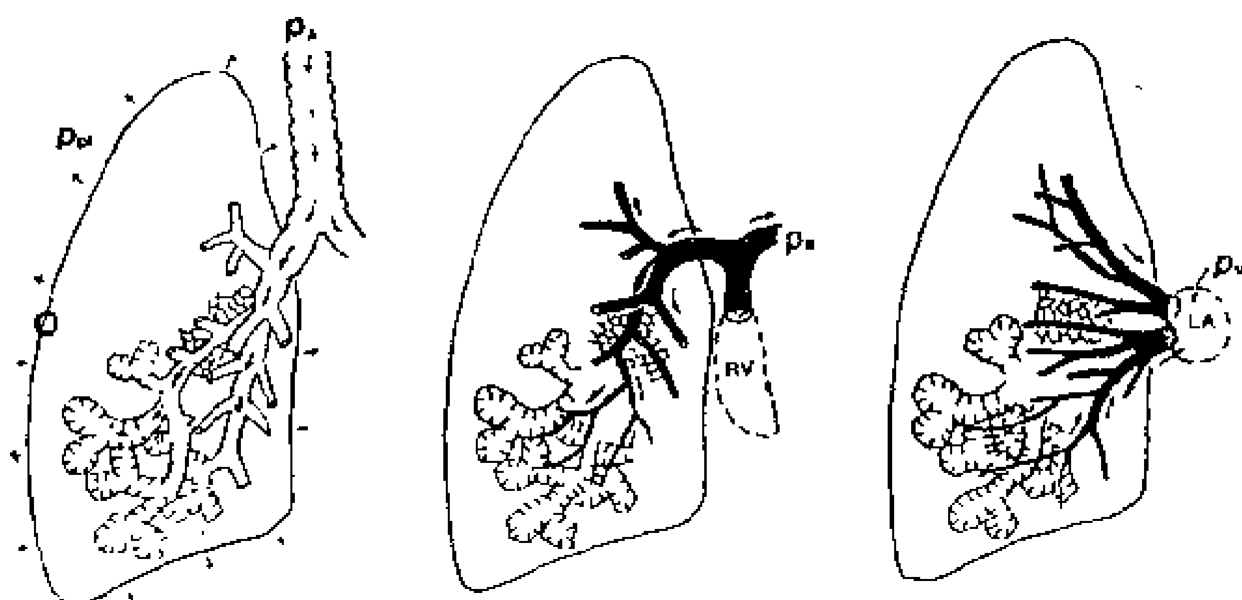


图 1.3　肺三套树状管路组成的概述图

(*a*)气道树(气管→支气管→细支气管→肺泡管→肺泡);(*b*)肺动脉树(动脉→细动脉→毛细血管);(*c*)静肺树(微静脉→静脉→左心房)

肺泡壁即为毛细血管。每个肺泡壁的两侧均暴露在气体中,肺动脉也一再分支直至变为肺泡壁内的毛细血管。静脉树始于肺泡壁内的毛细血管,经多次重复合并直至变为肺静脉并进入左心房。肺的主要功能是在肺泡内完成的,静脉血在肺泡内吸收氧并释放二氧化碳到肺泡气体,气体交换通过肺泡壁进行。图 1.5 为肺泡壁的微观图片,它是图 1.4 左边界上小圆的放大图片。图 1.6 显示了肺泡壁内的胶原纤维,胶原纤维经银染色后是黑色束状。胶原纤维由胶原微丝组成,而微丝则是由胶原蛋白分子形成的,并且还可继续分为分子,原子,核子,夸克等不同的微观层次。

根据我们欲观察研究的肺特性,可以在不同层次上将肺组织作为连续介质来考虑。譬如,如果人们对比较肺上部到肺下部的不同应变感兴趣,则可把单个肺泡视为无限小,并且可以说其平均体积变形将大于单一肺泡变形,但比整个肺的平均变形小。这一近似将适合于研究肺和胸壁之间的相互作用、胸膜压力的分布和全肺

通气的分布(因为肺通气与肺泡尺寸有关,而后者与应变成正比)。对于这些问题,考虑 1cm 的量级作为最小尺寸层次已经足够。另

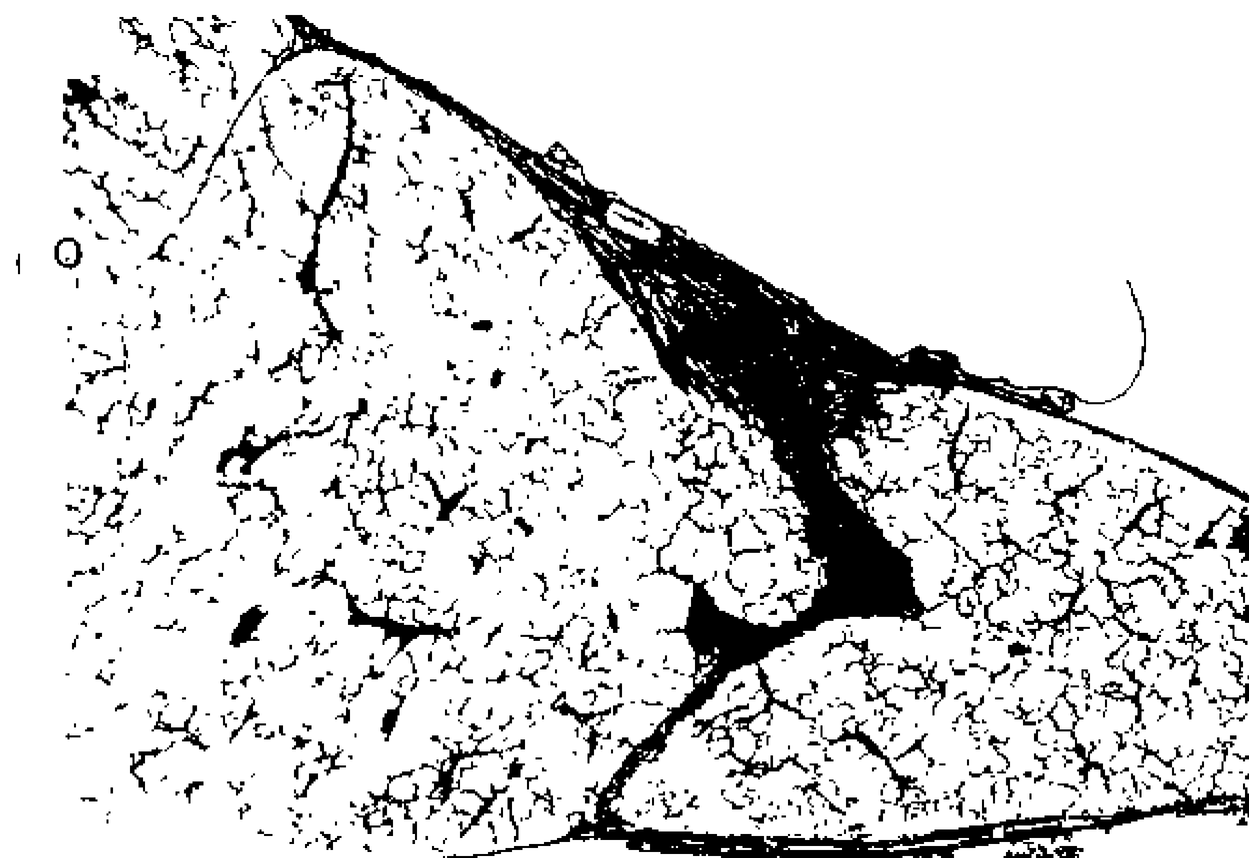


图 1.4　图 1.3(a)左边小圆的放大图

以银染色(厚为 150μm)的肺组织断面。黑线为胶原纤维,灰色区域为肺泡壁。

本图摘自:Matsuda, M., Fung, Y. C., and Sobin, S. S., "Collagen and Elastin Fibers in Human Pulmonary Alveolar Mouths and Ducts." *J. Appl. Physiology* 63(3): 1185—1194, 1987. Reproduced by permission.

一方面,如果人们对肺大动脉内的血液流动感兴趣,则可将血液作为均质流体处理,而血管壁可作为连续介质处理,并可将应力和应变的最小尺寸数量级定为 10μm。如果人们感兴趣的是单个肺泡壁(面积约 100μm×100μm,厚度约 10μm)的应力,则壁内单独的胶原纤维将不容忽视,必须将壁看成是若干不同材料所组成的复合结构,其构成方式也需要特别处理。至于采用何种平均形式将视研究目的而定。工程师、生物学家和物理学家都会关注这样的问题。我们致力于用经典连续介质力学处理这些问题是为了使其在

处理实际问题时更为有用。

1.11 表述基本概念的基础论题

作为本书概念的最后部分，让我们回顾一下力学发展史上的一些简单、有用而又基础性的论题。这些方法包括牛顿运动定律，动量方程，平衡方程，自由体图的应用，桁架、梁、柱、板、壳的分析，以及经典梁的理论。如果你熟悉这些内容，可以快速复习一遍。如果其中某些内容对你是新东西，那么学习这些内容对你来说不会是在浪费时间。

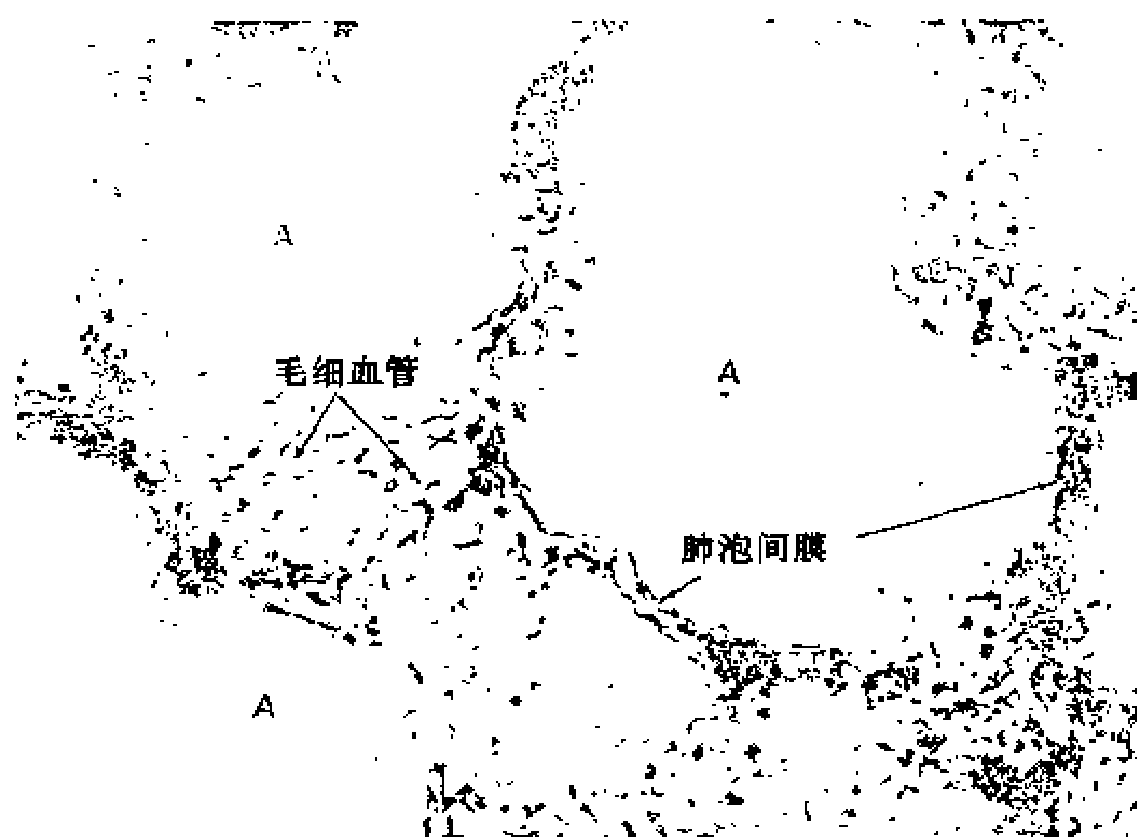


图 1.5 肺泡壁放大图(图 1.4 左上小圆的放大图片)

可以见到壁内的毛细血管(也称为肺泡内隔膜)；A 为肺泡的气体空间

牛顿运动定律

牛顿定律是对服从欧几里德几何的三维空间的质点进行阐述的。一个物质质点具有的唯一、恒正的度量，即质点的质量，质点的

位置可用正交笛卡尔参考系描述。假定在该空间内存在一个惯性参考系，而牛顿运动方程在该惯性参考系内是适用的。可以证明，



图 1.6　人肺泡壁内的胶原纤维

肺部膨胀至 1.333kPa（10cmH_2O）的跨壁压（即肺泡气体压力减去胸膜压力）。边界上显示的是长度尺寸；800 个格点等于 200μm（在肺组织中），OsO_4 固定，银染色。黑线为胶原纤维，其中最大纤维的直径约为 1μm。此图摘自：Sobin, S. S., Fung, Y. C., and Tremer, H. M., "Collagen and Elastin Fibers in Human Pulmonary Alveolar Walls," J. Appl. Physiology 64(4): 1659—1675, 1988. Reproduced by permission.

任何一个相对于惯性参考系作匀速运动的参考系仍是惯性参考系。考察一个质量为 m 的质点，令向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$ 分别代表该质点的位置、速度和加速度，所有这些都定义在惯性参考系内。由下式定义

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{1.11-1}$$

令向量 $\boldsymbol{F}$ 代表作用于质点的合力。若 $\boldsymbol{F}=0$,则可得牛顿第一定律

$$\boldsymbol{v} = 常数 \tag{1.11-2}$$

若 $\boldsymbol{F}\neq 0$,则可得牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \quad 或\ \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1.11-3}$$

当方程(1.11-3)写为

$$\boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{a}) = 0 \tag{1.11-4}$$

这个方程像是两个力的平衡方程,$-m\boldsymbol{a}$ 项称为惯性力。方程(1.11-4)可叙述为:作用在质点上的外力与惯性力之和为零,即惯性力与外力平衡。用这种方法叙述的牛顿运动方程称为达朗伯尔方程。

现在考虑一个相互关联的质点系,每一个质点都受系统内所有其它质点的影响。令下标 I 代表第 I 个质点,$\boldsymbol{F}_{IJ}$表示第 J 个质点对第 I 个质点的作用力,同理 $\boldsymbol{F}_{JI}$则是第 I 个质点对第 J 个质点的作用力。牛顿第三定律可写为

$$\boldsymbol{F}_{IJ} = -\boldsymbol{F}_{JI} \quad 或 \quad \boldsymbol{F}_{IJ} + \boldsymbol{F}_{JI} = 0 \tag{1.11-5}$$

如果 $I=J$,则与(1.11-5)相对应得 $\boldsymbol{F}_{II}=0$(不对 I 求和)。令 K 表示系统内质点的总数,作用在第 I 个质点上的力 $\boldsymbol{F}_I$包括外力 $\boldsymbol{F}_I^{(e)}$(如重力)和质点间相互作用力的合力,于是

$$\boldsymbol{F}_I = \boldsymbol{F}_I^{(e)} + \sum_{J=1}^{K}\boldsymbol{F}_{IJ} \tag{1.11-6}$$

因此,第 I 个质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}m_I\boldsymbol{v}_I}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_I^{(e)} + \sum_{J=1}^{K}\boldsymbol{F}_{IJ}(I = 1,2,\cdots,K) \tag{1.11-7}$$

每个质点都由这样的方程来描述,全部 K 个方程就描述了该系统的运动。

更进一步,我们必须详细阐明如何计算质点间的相互作用力 $\boldsymbol{F}_{IJ}$,亦即描述质点系的物质特性,称为该物质系的本构方程。

平衡

平衡是一种特殊的运动;也就是说,它是系统内任一质点的加速度都为零的运动。

在平衡状态,方程(1.11-7)可写为

$$F_I^{(e)} + \sum_{J=1}^{K} F_{IJ} = 0 \quad (I = 1,2,\cdots,K) \tag{1.11-8}$$

对 I 从 1 到 K 求和,我们有

$$\sum_{I=1}^{K} F_I^{(e)} + \sum_{I=1}^{K}\sum_{J=1}^{K} F_{IJ} = 0 \tag{1.11-9}$$

在第二项中,F_{IJ}和 F_{JI}是同时出现的。根据方程(1.11-5)式,其和为零。因此方程(1.11-9)式可简化为

$$\sum_{I=1}^{K} F_I^{(e)} = 0 \tag{1.11-10}$$

即对处于平衡状态的物体,作用于该物体上的外力和为零。

进一步我们考察一个物体的旋转情况。如果一个物体的支点在 O 点,并受力 F_I 的作用,则该力使物体绕 O 点转动的力矩等于向量积 $r_I \times F_I$,式中 r_I 为从 O 点到力 F_I 作用线上任意的径向向量。由 r_I 与方程(1.11-8)式中的每一项建立向量积,即分别取 $I=1,2,\cdots,K$,再将其求和,并以方程(1.11-5)式简化之,可得

$$\sum_{I=1}^{K} r_I \times F_I^{(e)} = 0 \tag{1.11-11}$$

由于 O 点的选择是任意的,故我们得到了物体平衡的第二个条件:作用于物体上的所有外力对任意一点的力矩和为零。

自由体图在分析问题中的应用

对前面所述的"物体"这个词或"质点系"这个词组,我们可以用更具体的方式去理解它们。例如,如果一台机器处于平衡状态,那么它的每一部分也处于平衡状态。适当选取要分析的部分,就可得到各种各样的信息。这种方法类似于外科医生检查器官的疾病。

用假想的剖面将物体的一部分切出，然后分析被分离出的这部分物体的平衡条件。将作用在这部分物体上的全部外力清楚地标明出来的图形叫自由体图，而这种方法叫自由体法。

例 1　桁架分析

在桥梁、建筑物、建筑工地的升降机、电视塔、射电天文学所用的天线中常见的构架结构就是桁架。图 1.7(*a*)所示的小铁路桥即是典型的桁架，它是由钢制件 ab，bc，ac，…栓连而成，连接点 a，b，c，…可看成“铰接”，意思是钢制件用铰链连接在一起，并可以彼此相对自由旋转。整个桁架“简支”在端部 a 和 l 上，这样就只是将桁架锚住，但对桁架不施加力矩。l 处的支点支在滚子上，这样就可以排除来自地基的水平反作用力。

桁架是由细长元件制成的，这些元件自身的重量与桁架承受的载荷相比是很小的，因此作为一级近似，元件的重量可以略去。

由于每个元件都是铁接的，并忽略了自身重量，所以元件的平衡条件要求来自连接点的一对力必须大小相等、方向相反。因此，每个元件只能传递轴向力。

令桁架在中点(g 点)承受重量 W。我们希望知道作用在桁架各元件上的载荷。

让我们首先计算两个支点处的反作用力。将整个桁架作为一个自由体，它承受三个外力：W，R_L，R_R(图 1.7(*b*))。平衡条件为

(1)垂直方向的合力为零

$$W - R_L - R_R = 0$$

(2)绕 a 点的合力矩为零

$$W \cdot 3L - R_R \cdot 6L = 0$$

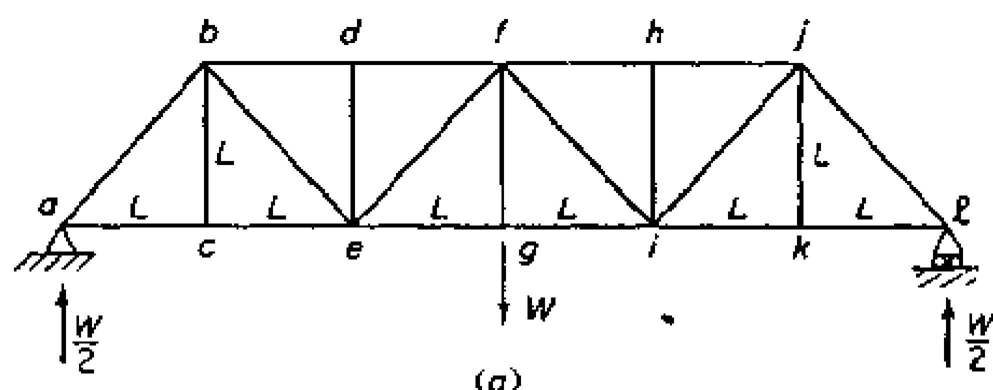
计算结果为：$R_R = R_L = W/2$

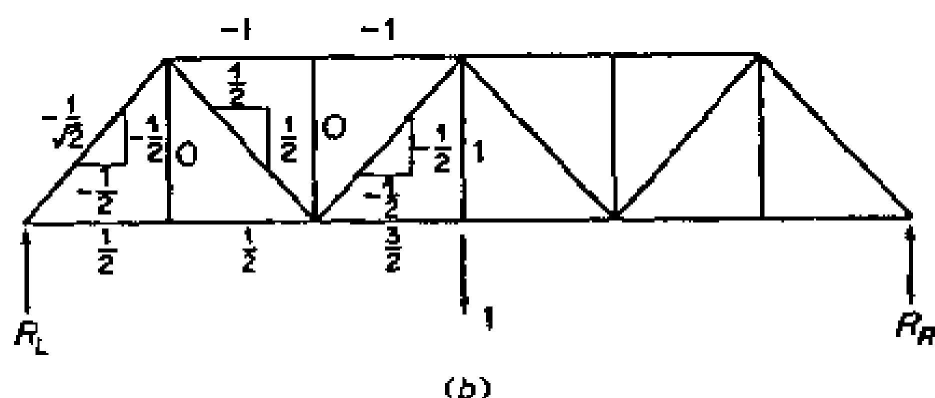
其次，我们希望知道元件 ab 和 ac 中的拉力。为此，用一假想平面切开 ab 和 ac，并将 $ab'c'$ 视为自由体(见图 1.7(*c*))。在切面暴露的端部 b' 处，有拉力 $\boldsymbol{F}_{ab}$ 作用在元件 ab 上，拉力 $\boldsymbol{F}_{ac}$ 作用在 ac 的切面 c' 上，在支点 a 作用有力 $W/2$(前面已计算出它的反作用力 R_L)。现在求所有力在垂直方向上的合力，并令 F 代表 $\boldsymbol{F}$ 的大小，

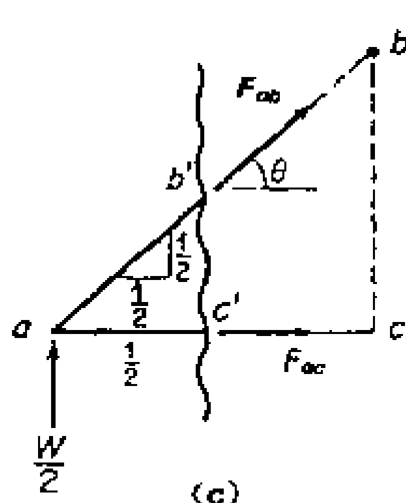
则有

$$\frac{W}{2} + F_{ab}\sin\theta = 0$$

因 $\theta=45°$，$\sin\theta=\sqrt{2}/2$，故得 $F_{ab}=-W/\sqrt{2}$。







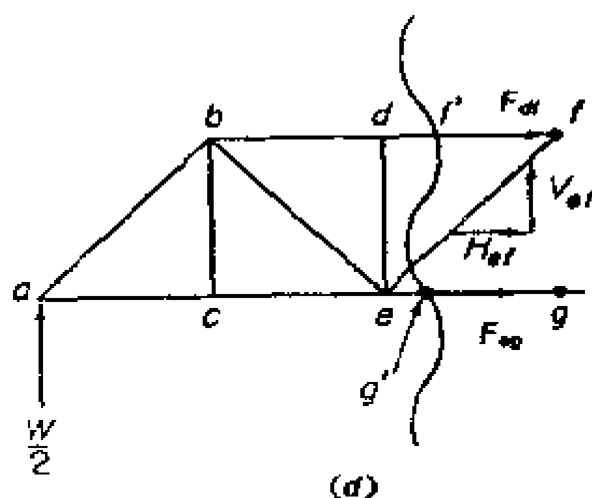


图 1.7　载荷作用力为 W 的简支铰连桁架

(a)连接点的名称为(a,b,…)，元件的长度为 L；(b)当载荷力为 $W=1$ 时，+表示拉力，−表示压缩，在元件 ab,be,ef 上的小三角形表示作用在这些元件上的合力的水平和垂直分量；(c)元件 ab' 和 ac' 的自由体图；(d)由切面 f',g' 分离出的桁架左面的自由体图

求水平方向上的合力，得到

$$F_{ab}\cos\theta + F_{ac} = 0$$

因此，对 $\theta = 45°$ 及 $F_{ab} = -W/\sqrt{2}$，可得 $F_{ac} = W/\sqrt{2}$。

接着我们来计算元件 df、ef 及 eg 内的张力。经过这些元件作切面，将桁架左边部分当作自由体（见图 1.7(d)）。为方便起见，将元件 ef 内的拉力分解成两个分量：水平分量 H_{ef} 和垂直分量 V_{ef}。将所有作用在这个自由体上的外力表示在图 1.7(d)中。平衡条件为

(1)所有水平力的总和为零

$$F_{df} + H_{ef} + F_{eg} = 0$$

(2)所有垂直力的总和为零

$$W/2 + V_{ef} = 0$$

(3)绕 e 点的合力矩为零

$$\frac{W}{2} \cdot 2L + F_{df} \cdot L + 0 \cdot F_{ef} + 0 \cdot F_{eg} = 0$$

(4)绕 f 点的合力矩为零

$$\frac{W}{2} \cdot 3L - F_{eg} \cdot L = 0$$

从条件(3)可得 $F_{df} = -W$；从条件(4)可得 $F_{eg} = 3W/2$；从条件(2)可得 $V_{ef} = -W/2$；最后从条件(1)得到 $H_{ef} = -W/2$。对桁架其他元件亦可做类似的分析计算。

计算的结果表示在图 1.7(b)，由于每个元件中的载荷都与 W 成比例，所以我们可以将每个元件中的载荷以 W 为单位来表示，故可设 W 等于 1。在桁架设计中，知道某个元件是受拉还是承压是很重要的（在两端受压的杆称为压杆；在两端受拉的杆称为拉杆）。在设计钢元件时，它处于受压和受拉情形是不一样的；拉伸元件可能由于塑性屈服而破坏，而压缩元件可能由于弹性屈曲而破坏。前述方程中 F_{ac}，F_{ab}，V_{ef}，H_{ef} 等的符号取决于我们画在自由体图上向量的方向（它是任意画的）。每个元件内应力的拉伸—压缩特性是由载荷 W 所确定的。我们将最后的结果表示在图 1.7(b)

中，并约定：若元件受拉，则给载荷以正号；若元件受压，则给载荷以负号。于是，在图 1.7(b) 中，我们看到元件 ab 受压，元件 be，ac 及 eg 受拉，元件 ef 受压。

例 2　简支梁

梁是以弯曲来抵抗侧向载荷的实心元件。图 1.8(a) 表示了一个简支梁，它的功能类似于例 1 中所讨论的桁架，不过桁架是用元件的拉伸或压缩来抵抗载荷，而梁是用连续分布的拉伸和压缩应力来抵抗载荷。

如图 1.8(a) 所示，梁的端部支撑在不抵抗力矩的铰链上。显然，支点上的反作用力为 $W/2$。

现在让我们来考察梁是如何抵抗外力载荷的。为此，用一垂直于梁的假想平面在距左端 x 处作一切面（图 1.8(b)）。考虑梁左边部分的自由体图，在截面上作用有与该截面相切的“剪应力”S，垂直于截面的“轴向力”H 和称为梁内弯矩的力矩 M。平衡条件是

(1)在水平方向所有力的合力为零

$$H = 0$$

(2)在垂直方向上的合力为零

$$S = W/2$$

(3)所有力绕左端支点的力矩为零

$$M = Sx = \left(\frac{W}{2}\right)x$$

于是，在与左端相距 x 处的横剖面内，梁内应力与剪力 $S=W/2$ 和弯矩 $M=Wx/2$ 相抵抗。

从图 1.8(c) 可看出，弯矩随 x 而变化，这样的图称为承受特定载荷的梁的弯矩图。知道了弯矩，就可以计算作用于梁内的应力（见方程(1.11-31)）。梁一般是根据它所必须抵抗的最大弯矩来设计的。

例 3　块体中的应力

如图 1.9(a) 所示，研究一端部受压缩载荷 W 的物体，物体为一长方体，我们希望知道该物体内的应力。

假定在距端部足够远的地方，块体中的应力是均匀的，即处处一样。我们建立一组直角笛卡儿坐标 x, y, z，如图1.9(b)所示，z 轴平行于块体的轴。经过一个假想平面 $z=0$ 切开块体，考察其上半部的自由体图。作用在 $z=0$ 面上的应力必有一合力和合力矩。与前面一样，应用平衡条件，可求得合力的水平分量为零，合力的垂直分量是 W，合力矩为零。在这种情况下，我们讲，作用在平面 $z=0$ 上的应力是压缩正应力，其大小为

$$\sigma = -\frac{W}{A} \tag{1.11-12}$$

其中 A 是块体的法向横剖面面积（用垂直于块体轴的平面 $z=0$ 切开）。因为在该方向材料受压，所以应力是压应力。它是正应力，因为 σ 是垂直于平面 $z=0$ 的每单位面积的力。我们用负值应力来表示压应力。

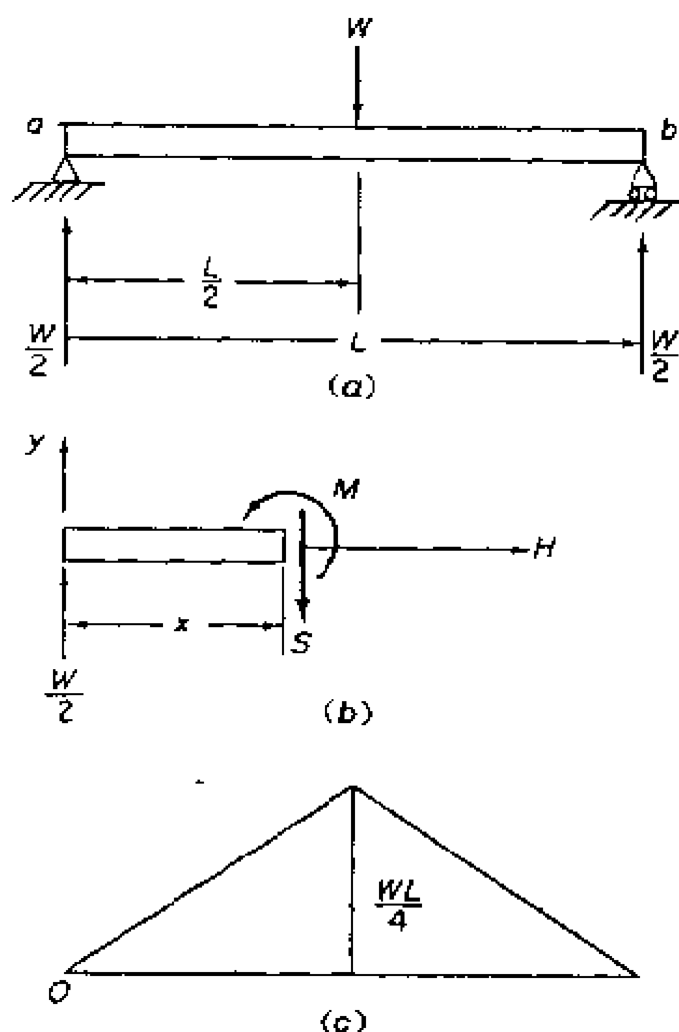


图 1.8 简支梁

(a)长度为 L，作用载荷为 W 的简支梁；(b)从左端开始距左端 x 处作一截面的自由体图，作用在横截面上的剪力为 S，轴力 H，弯矩 M；(c)位于截面上，横坐标位置为 x 的弯矩 M 的弯矩图。底边长度为 L，最大弯矩为 $WL/4$，作用在 $x=L/2$处的截面上

其次，我们用一个与 xy 平面倾斜度为 θ 的平面作一切口。表示一个平面方向的最简单方法是用平面的法向向量。令 ν 是倾斜面的单位法向向量(单位长度)，z 是 z 轴轴向的单位矢量；则 $\nu \cdot z$

$=\cos(\nu,z)=\cos\theta$。考察作为自由体的块体的上半部，如图 1.9(c)所示。力的平衡要求作用在平面 ν(即单位法向向量为 ν 的平面)上的合力正好等于 $-W$。这个合力可以分解成两个分量，一个垂直于该平面，一个与该平面相切。如图 1.9(c)所示。令这两个分量分别为 N 和 S；则(见图 1.9(d))。

$$N=-W\cos\theta,\quad S=-W\sin\theta \qquad (1.11\text{-}13)$$

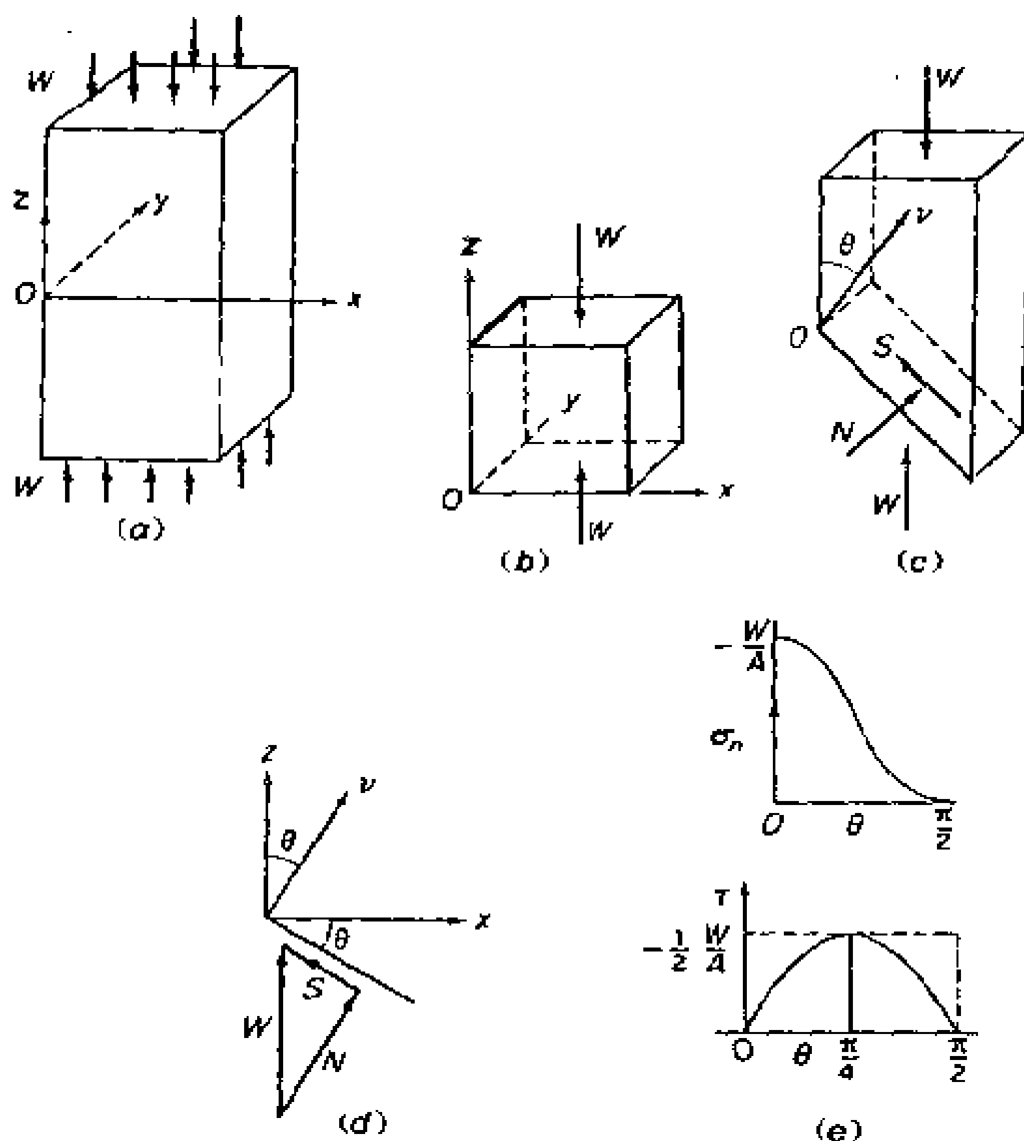


图 1.9　块体中的应力

(a)x,y,z 为参考系，W 为作用于块体的力；(b)块体在 $z=0$ 平面上部的自由体图；(c)块体自法向量为 ν 的平面切割后的自由体图；(d)沿法向量 ν 方向将作用力分解为正压力 N 和剪力 S；(e)作用于斜面的正应力和剪应力 σ_n,τ 随斜面倾斜角 θ 的变化曲线

由平面 ν 所切开的块体的横剖面面积是 $A/\cos\theta$，其中 A 是法向横

剖面面积。用 N 和 S 作用的表面的面积去除 N 和 S，并用 σ_n 和 τ 表示这个结果，则有

$$\sigma_n = -\cos^2\theta W/A, \tau = -\sin\theta\cos\theta W/A \quad (1.11\text{-}14)$$

它们分别是作用在斜面 ν 上的正应力和剪应力。我们给正应力 σ_n 冠以负号，表示它是压应力。如果载荷 W 反向，使块体受拉，那么平面 ν 两边的材料趋于被拉开。在这种情况下，我们就说应力是拉应力，并给定 σ_n 为正值。

如何约定剪应力的符号将在 3.1 节讨论。

正应力 σ_n 和剪应力 τ 随 θ 角变化。如果我们将它们绘成 θ 的函数，即得图 1.9(e)所示曲线。可以看到，当 $\theta=0$ 时，σ_n 有最大值，而剪应力 τ 在 $\theta=45°$时达到最大值，最大剪应力 $\tau_{最大}=\frac{1}{2}W/A$。

从这个例子我们可以知道，存在两个应力分量，正应力和剪应力，它们在物体内任意给定点处的值依赖于应力作用面的方向。因此应力是与另一个向量(ν)有关的一个向量(σ_n,τ)。为了确定应力，我们必须确定两个向量。另外为了完全地确定连续介质中一给定点处的应力状态，我们必须知道作用在所有可能面 ν(即位于所有可能方向的剖面)上的应力。像应力状态这样的量称为张量。于是这个例子告诉我们，应力是一个张量性质的量。

在国际单位制(SI 单位)中，力的基本单位是牛顿，长度的基本单位是米，于是应力的基本单位是牛顿/米²，或帕(Pa，为纪念帕斯卡)，$1\text{MPa}=1\text{N/mm}^2$ 即 1 牛顿/毫米²。1 牛顿的力可把质量为 1 千克的物体加速到 1 米/秒²。1 达因的力可把质量为 1 克的物体加速到 1 厘米/秒²。因此，1 达因$=10^{-5}$牛顿。下面列出了一些换算系数：

1 千克力(kgf) = 9.80665 牛顿(N)

1 磅力 ≈ 4.448 221 牛顿

1 磅质量(常衡制) ≈ 0.453 592 千克(kg)

1 磅 / 英寸² ≈ 6.894 757 千帕(kPa)

$$1\text{ 达因 / 厘米}^2 = 0.100\text{ 牛顿 / 米}^2(N/m^2)$$

$$1\text{ 大气压} \approx 1.01325 \times 10^5\text{ 牛顿 / 米}^2 = 1.01325\text{ 帕}(Pa)$$

$$\cdot\text{ 在 }0^\circ C\text{ 时}\quad 1\text{ 毫米汞柱}(mmHg) \approx 133.322\text{ 牛顿 / 米}^2(N/m^2)$$

$$= 1\text{ 托} \sim \frac{1}{7.5}\text{ 千帕}$$

$$\text{在 }4^\circ C\text{ 时}\quad 1\text{ 厘米水柱}(cmH_2O) \approx 98.0638\text{ 牛顿 / 米}^2(N/m^2)$$

$$1\text{ 泊(粘度)} = 0.1\text{ 牛顿}\cdot\text{秒 / 米}^2 = 0.1\text{ 帕}\cdot\text{秒}(Pa\cdot s)$$

$$1\text{ 厘泊}(CP) = 0.001\text{ 帕}\cdot\text{秒}(Pa\cdot s)$$

应力的概念有实际意义。如果有一个大块体和一个小块体，它们的材料相同，显然大块体能承受较大的载荷，小块体只能承受较小的载荷；但是两者在相同的临界应力状态下都将破碎。因此工程师们关注的是应力。

例 4　板中应力

考察一个等厚度、均质材料的矩形薄板。如图 1.10(a)和(b)所示。在面 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 上，板承受均匀分布的载荷，在面 $z=\pm h/2$ 上，板不受载荷。图 1.10(b)中表示了作用在边缘 $x=a$ 上的应力，单位面积上它的大小是 σ_{xx}(σ_{xx}等于在边缘 $x=a$ 上的总载荷除以用平面 $x=a$ 所切出板的横剖面面积)。作用在边缘 $y=b$ 上的应力值为 σ_{yy}(每单位面积)。在图 1.10(c)，表示了板在边缘 $x=a$ 上承受剪应力 τ_{xy}(τ_{xy}等于作用在边缘 $x=a$ 上，沿 y 轴方向的总剪力除以 $x=a$ 处的横剖面面积)，在边缘 $y=b$ 承受剪应力 τ_{yx}。σ_{xx}，σ_{yy}，τ_{xy}，τ_{yx}均称为应力，因为它们都用单位面积力的单位。

把平衡方程用于图 1.10(b)中所示的板。我们看到，作用在边缘 $x=-a$ 上的应力 σ_{xx}等于作用在边缘 $x=a$ 上的 σ_{xx}。把平衡方程用于图 1.10(c)所示的板，我们看到，$x=-a$ 上的 τ_{xy}等于 $x=a$ 上的 τ_{xy}，$y=b$ 和 $y=-b$ 上的 τ_{yx}也相等；进一步，将所有力对原点 O 取矩(应力×横剖面面积)，得

$$2a\cdot\tau_{xy}\cdot 2bh - 2b\cdot\tau_{yx}\cdot 2ah = 0\text{，或 }\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

图 1.10(b)所示板的应力状态用 σ_{xx}和 σ_{yy}来表示。图 1.10(c)所示板的应力状态用 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$来规定。如果板受正应力 σ_{xx}，σ_{yy}和剪

应力 τ_{xy}，τ_{yx}联合作用(叠加图 1.10(b)和(c)所示情况)，那么应力状态由四个数 σ_{xx}，σ_{yy}，τ_{xy}，τ_{yx}($\tau_{yx}=\tau_{xy}$)所决定。为了弄清两个下标符号的意义，我们说明以下规则：应力的第一个下标表示应力的作用面，而第二个下标表示力的作用方向。于是，例 3 末尾所提及的应力的张量特征在本例中就变得更清楚了。

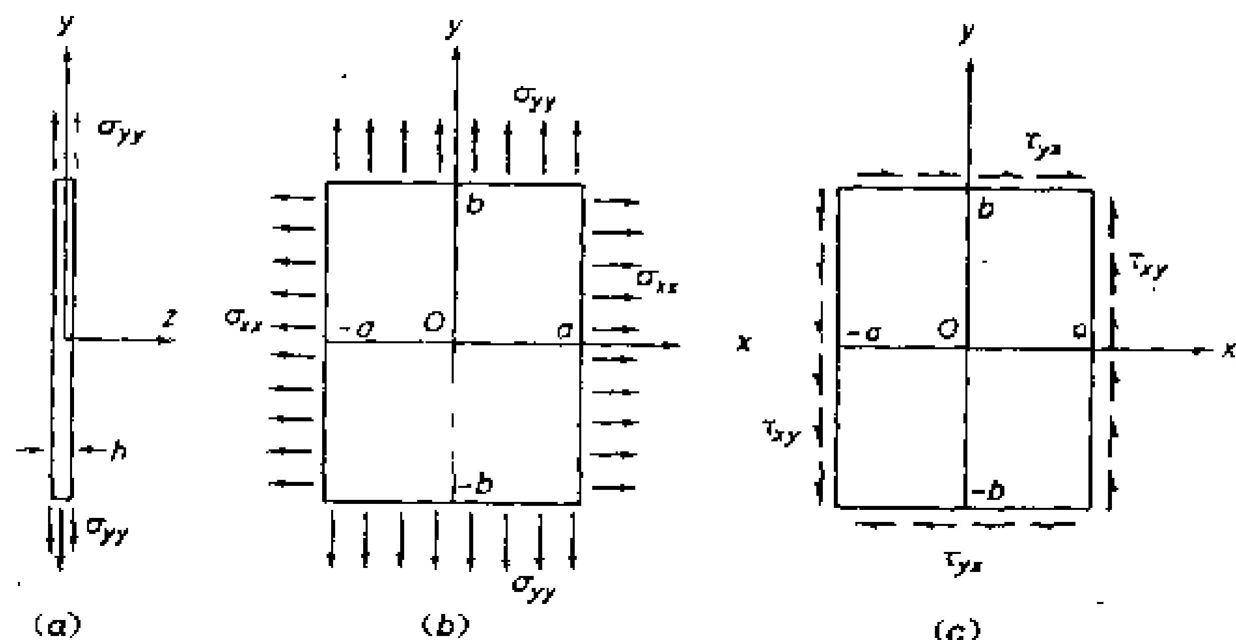


图 1.10　平板中的应力

(a)yz 平面板的侧面情况，作用在平面上的应力 σ_{yy}与 y 轴正交；(b)xy 平面平板的情况，正应力作用于切割 x 轴的平面，并在 x 轴方向上。正应力 σ_{yy}作用在切割 y 轴的平面，并在 y 轴方向上；(c)剪应力 τ_{xy}是单位面积上的力，作用于垂直于 x 轴的平面，并在 y 轴方向上。如果横截 x 轴的平面的外法向指向 x 轴正方向，则 τ_{xy}为正，即指该应力指向 y 轴正方向。如果是指向 x 轴负方向，则 τ_{xy}为正，即指该力指向 y 轴负方向。类似地，τ_{yx}是作用于垂直于 y 轴横截面并指向 x 方向的应力向量

例 5　一个充压球壳

如图 1.11(a)所示，一个充气的气球球壁是受拉的。我们很想知道壁内的拉应力。为此，最简单的办法是用一个通过直径的平面切开球，并把半球作为一个自由体来研究，如图 1.11(b)所示。令壳的内半径是 r_i，外半径是 r_o，壁厚 $h=r_o-r_i$。内压 p_i 作用在内壁上，作用在半球上的合压力是 $\pi r_i^2 p_i$。壳壁内的正应力是不均匀的，计算这个正应力必须应用一般公式(第 10 章及以下)，但是计算壁

内的平均拉应力是很容易的。令$<\sigma>$是作用在垂直于球壁面(即经过球心的面)上的平均正应力。过直径的平面上的壁面积是$\pi r_0^2-\pi r_i^2$。由壁应力而来的总拉伸力是$\pi(r_0^2-r_i^2)<\sigma>$。因此，力的平衡要求

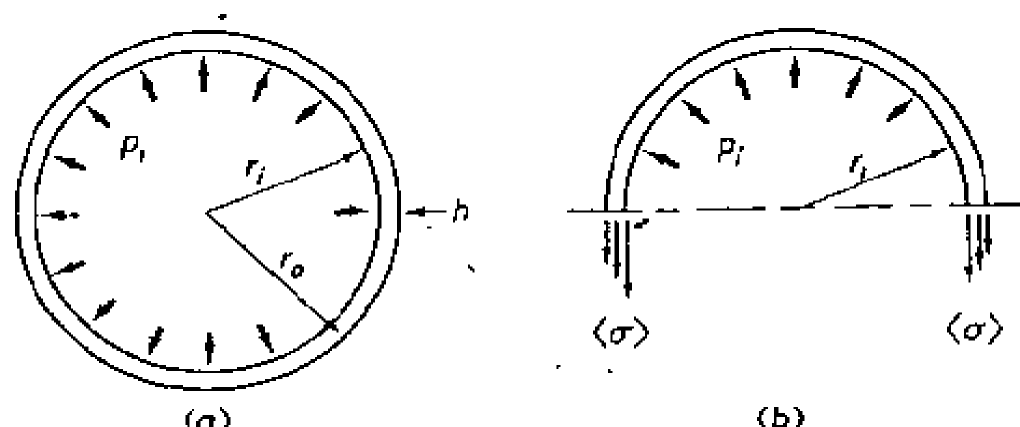


图 1.11 充压球壳

(a)通过壳中心的径向切割面切割的球壳；r_i 为内径，r_o 为外径，h 为壳厚度，内压为 p_i；(b)自由体图：它由相距很小的两个平行平面和垂直于该两平面并通过球心的第三个平面切割而成。周向应力 σ 垂直于第三个平面，该应力沿壳体的壁厚而变化，其平均值为$<\sigma>$。$<\sigma>$在文中已计算得到

$$\pi(r_0^2-r_i^2)<\sigma>=\pi r_i^2 p_i \tag{1.11-15}$$

或

$$<\sigma>=p_i\frac{r_i^2}{r_o^2-r_i^2}=\frac{r_i^2 p_i}{h(r_o+r_i)} \tag{1.11-16}$$

这是一个有用的公式，适用于厚壁以及薄壁球壳。

如果压力 p_o 作用在壳的外面(图 1.12)，在壁内引起的法向应力是

$$<\sigma>=-\frac{r_o^2 p_o}{h(r_o+r_i)} \tag{1.11-17}$$

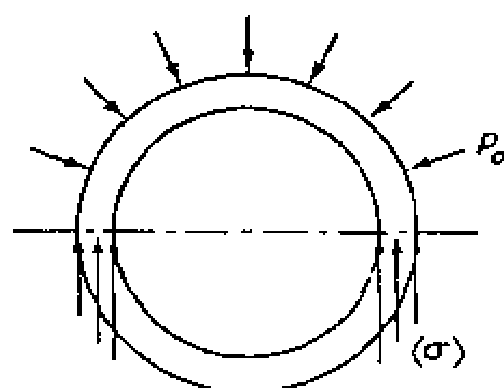


图 1.12 抵抗外周压力的球壳示意图

假如球壳受到外部和内部两种压力且球壁非常薄，则 $r_o-r_i=h$，但是 $r_o\approx r_i=r$，上面方程简化为

$$<\sigma>=\frac{rp_i}{2h}-\frac{rp_o}{2h} \tag{1.11-18}$$

例 6　受压圆柱容器

考察一个承受内压 p_i 的圆柱形壳，如图 1.13(a)所示。用两个垂直于圆柱轴的平面把壳切成环，用另一个经过圆柱轴的平面把环切成两半，并把半圆环分离成图 1.13(b)所示的自由体。作用在

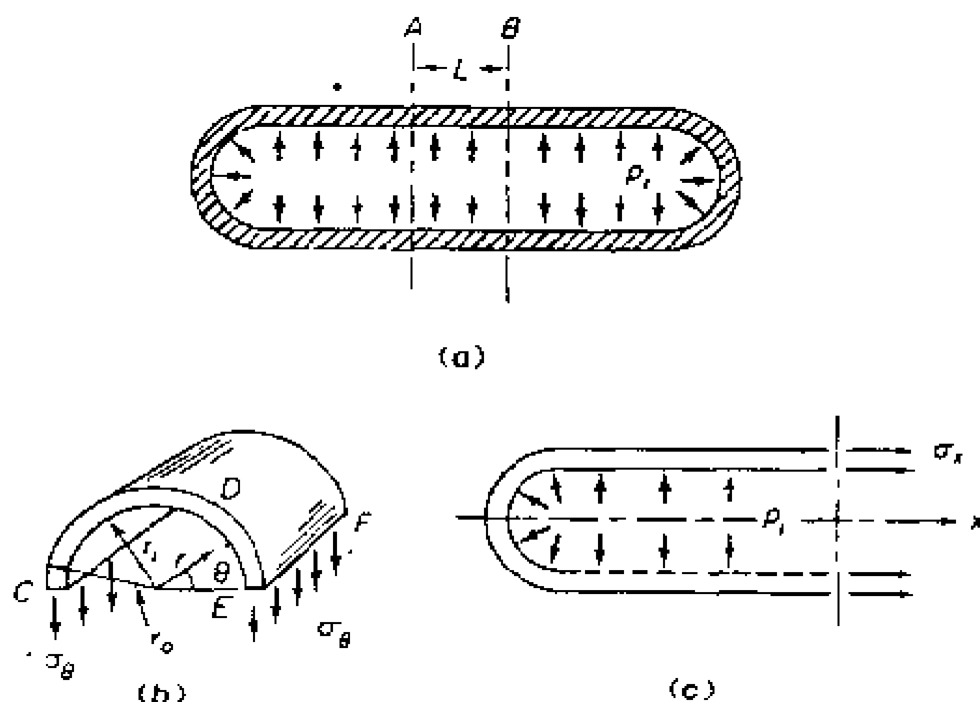


图 1.13　充压圆筒

(a)由通过圆筒轴线的平面切割的筒壳；(b)自由体图：由两个正交于轴线的平面和包容轴线的第三个平面切割而成；(c)由正交于轴线的平面切割的筒壳左部的自由体图

径向切口 CD 上的应力垂直于表面，并指向极坐标中极角 θ 增加的方向，因此它用 σ_θ 表示。与例 5 相同，我们不知道横剖面内 σ_θ 的精确分布情况，但是如果 $<\sigma_\theta>$ 表示横剖面上 σ_θ 的平均值的话，则 $<\sigma_\theta>$ 乘以面积 $(r_0-r_i)L$ 就是作用在横剖面 CD 内的合力。类似地，剖面 EF 内的拉力(图 1.13(b))也是 $<\sigma_\theta>(r_0-r_i)L$。作用在内侧压力的合力是 $2r_iLp_i$。作用在半圆环上的力在垂直方向上的平衡条件要求

$$2<\sigma_\theta>(r_o-r_i)L=2r_iLp_i \tag{1.11-19}$$

因此

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \frac{r_i p_i}{r_o - r_i} \tag{1.11-20}$$

它是另一个非常有用的精确公式。

如果用一个垂直于圆柱轴的平面将柱壳切开，并考察作为自由体的左半个容器，如图 1.13(*c*)所示，我们就可以检验轴向应力 σ_x 的平均值，σ_x 作用在垂直于 x 的横剖面上并沿 x 方向。我们注意到 σ_x 的作用面积是 $\pi(r_o^2-r_i^2)$。另一方面，内压 p_i 所作用的表面在轴向的投影面积等于 πr_i^2。因此，由力在轴向的平衡导出

$$\pi r_i^2 p_i = \langle \sigma_x \rangle \pi(r_o^2 - r_i^2) \tag{1.11-21}$$

或

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \tag{1.11-22}$$

如果壳壁很薄，使得 $r_o-r_i=h$，$r_o \approx r_i=r$，那么这些方程简化为

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \frac{r p_i}{h}, \quad \langle \sigma_x \rangle = \frac{r p_i}{2h} \tag{1.11-23}$$

简支梁理论

考察一个均匀、各向同性、虎克材料的具有矩形横剖面的棱柱形梁，如图 1.14(*a*)所示，在其两端承受一对大小为 M 的弯矩。如果端部弯矩作用的平面为梁横剖面的对称面，则梁将弯曲为在同一平面内的圆弧，如图 1.14(*b*)所示。因为每个横剖面都经受着同样的应力和应变，由于对称，挠度曲线必定是圆弧。假定挠度远小于梁的长度。选择 xyz 直角参考标架，以 x 轴指向梁的纵轴方向，y 轴垂直于 x 但位于弯曲平面内，z 轴垂直于 x 和 y，见图 1.14(*a*)。坐标原点选在一个横剖面的形心上，其理由将在下面阐述清楚。

梁的挠度可以由形心面（当梁处于无挠曲位形的情况下 $y=0$ 的平面）的挠度和相对于这个面的任一位移来描述。考察两个相邻的横剖面 A 和 B，在梁未加载时它们垂直于 $y=0$ 的平面。当梁弯

曲成圆弧时，这两个平面 A,B 变成平面 A',B'，它们仍然垂直于圆弧，见图 1.14(c)。由于对称，A'和 B'是平面；又由于对称，它们垂直于形心的弧。令形心弧的曲率半径为 R，当横剖面 A'和 B'弯曲成相对角 $d\theta$ 时，形心弧的弧长为 $Rd\theta$；而在形心线上面距离为 y 处的线段长度是$(R+y)d\theta$，长度的变化为 $yd\theta$，它被原来长度 $Rd\theta$ 除后得到应变

$$e_{xx}=\frac{y}{R} \tag{1.11-24}$$

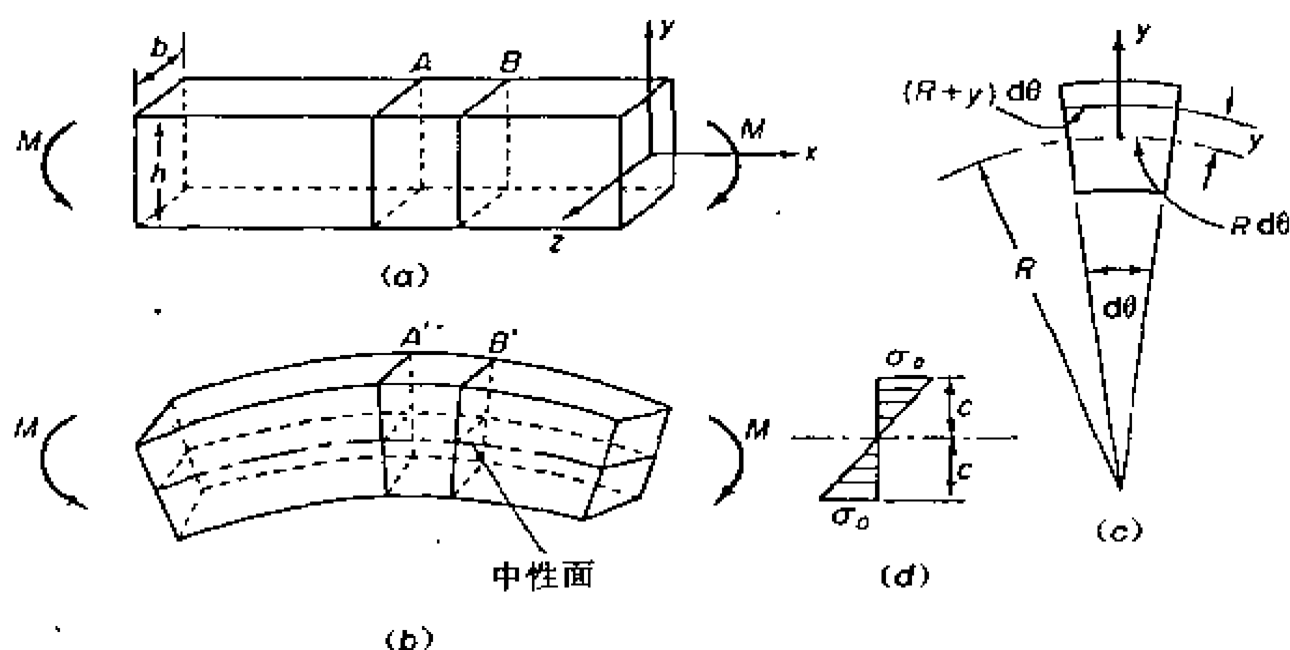


图 1.14 棱柱形梁的弯曲

(a)零应力状态的梁；(b)受恒定弯矩 M 作用下，梁的弯曲；(c)按经典梁的理论，梁的变形由两相邻的横截面间的部分描述。即(a)中的 A 和 B 及(b)中的 A'和 B'。R 为中性面的曲率半径，坐标系(x,y,z)建立在该面上；(d)弯曲应力在梁横截面的分布情况，在中性面上弯曲应力为零。在弯曲变形中，弯曲应力与中性面正交的横截面沿 y 轴是线性函数分布关系

和应变 e_{xx}相对应的应力为 σ_{xx}。现在我们假定仅有应力分量 σ_{xx}不等于零，而 $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$。则根据虎克定律有

$$\sigma_{xx}=Ee_{xx}=E\frac{y}{R} \tag{1.11-25}$$

既然只有纯弯矩作用在梁上，轴向力的合力就必须为零。即

$$\int_A \sigma_{xx} \mathrm{d}A = 0 \tag{1.11-26}$$

此处 A 为横剖面，$\mathrm{d}A$ 是横剖面的面积元素，并且积分遍及整个横剖面。把(1.1-25)式代入(1.11-26)式得到

$$\int_A y \mathrm{d}A = 0 \tag{1.11-27}$$

这就是说原点必须是横剖面的形心。这也解释了一开始我们把原点选在形心上的理由。形心平面 $y=0$ 在弯曲时不受应力[根据方程(1.11-25)]，在此平面上材料的质点没有轴向应变，因此这个平面称为梁的中性面。

弯曲应力 σ_{xx} 对 z 轴的合力矩必定等于外力矩 M。作用在横剖面内某个面元素 $\mathrm{d}A$ 上的力 $\sigma_{xx}\mathrm{d}A$ 具有力臂 y，由此弯矩是

$$M = \int_A y\sigma_{xx} \mathrm{d}A \tag{1.11-28}$$

把方程(1.11-25)代入上式得到

$$M = \frac{E}{R}\int_A y^2 \mathrm{d}A \tag{1.11-29}$$

我们定义后面的积分为横剖面的惯性矩，并用 I 来表示。

$$I = \int_A y^2 \mathrm{d}A \tag{1.11-30}$$

那么上面的方程可以写为

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{R}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_a \frac{y}{c}, \quad \sigma_a = \frac{Mc}{I} \tag{1.11-31}$$

式中 c 是从中性面到横剖面边缘的最大距离，见图 1.14(a)。应力 σ_a 是梁上的最大弯曲应力，由于它是梁横剖面外缘处的应力，所以称为外纤维应力。I 是横剖面的几何特性，对于图 1.14(a)所示的高为 h、宽为 b 的矩形横剖面，我们有 $c=\frac{h}{2}$ 和 $I=\frac{1}{12}bh^3$。

当棱柱形梁受纯弯曲时，上面这些公式给出了它们的应力和应变。对于如图 1.15 所示受一般载荷的棱柱形梁，我们能不能应用这些公式呢？这些公式能不能用于变剖面梁呢？回答是：虽然解不再是绝对的正确，但从经验上看却出奇的好。基本理由是：在一

般情况下必然存在着剪应力引起的挠度，但它与弯矩所引起的挠度相比可以忽略。因此一般说来，平剖面保持平面的假设是令人满意的，并且可以认为方程(1.11-24)到(1.11-31)对梁来说在一定程度上是正确的。



图 1.15 受分布载荷的梁

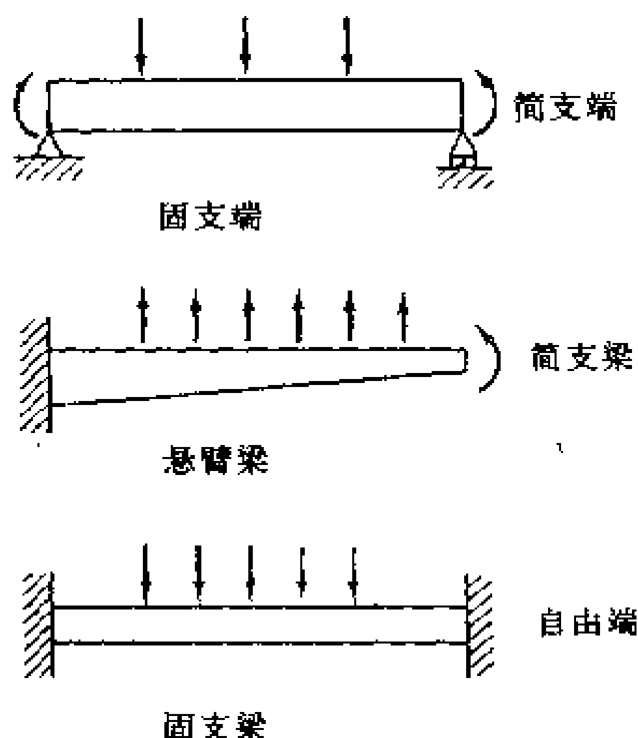


图 1.16 梁的端部条件

梁的挠度

根据这种经验性的考虑，我们可以分析侧向载荷下梁的挠度。例如，考察图 1.16 所示的梁。设梁的挠度曲线(中性面的挠度)为 $y(x)$。当 $y(x)$ 很小(远小于梁的长度)时，它的曲率可以近似地用 d^2y/dx^2 来表示，并用方程(1.11—31)导出基本方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{EI}M(x) \tag{1.11-32}$$

以适当的边界条件解这个方程，能够得到梁的挠度 $y(x)$。边界条件是

简支端(挠度和弯矩为零)

$$y=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{1.11-33}$$

固支端(挠度和斜率为零)

$$y=0,\quad \frac{dy}{dx}=0 \tag{1.11-34}$$

自由端(弯矩和剪力给定)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M,\quad EI\frac{d^3y}{dx^3}=S \tag{1.11-35}$$

(见图 1.16)。除了最后一个条件以外，其它的条件都相当清楚。为了解释最后一个条件，我们要回忆习题 1.21，它表明弯矩 M、横向剪力 S 和每单位长度的侧向载荷 w 之间由如下方程联系

$$\frac{dM}{dx}=S,\frac{dS}{dx}=w \tag{1.11-36}$$

但因为 $M=EId^2y/dx^2$，如上面所指出的那样我们必有 $S=EId^3y/dx^3$。

如果曲率很小(因而上面的分析能够有效)，而斜率是有限值的话，那么我们就应利用 $1/R$ 的精确表示式，它导出了下面的方程以代替方程(1.11-32)式

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-3/2}=\frac{M(x)}{EI} \tag{1.11-37}$$

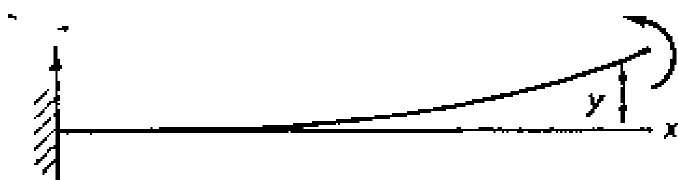


图 1.17　悬臂梁的弯曲

以图 1.17 所示的左端固支受常值弯矩的悬壁梁小挠度情况为例来研究。在此情况下，方程(1.11-32)的右侧为常数，将该方程积分可以得到

$$y(x)=\frac{M}{EI}\frac{x^2}{2}+Ax+B \tag{1.11-38}$$

其中 A 和 B 是任意常数。边界条件为：在 $x=0$ 处 $y=\frac{dy}{dx}=0$，故有 $A=B=0$，因此解为

$$y=\frac{M}{EI}\frac{x^2}{2} \tag{1.11-39}$$

在这一特殊情况中，因为 $M=$常数，自由端的边界条件也满足。

但是，在一般情况下能够满足全部边界条件吗？毕竟每个梁有两个端，每端有两个边界条件，因此有四个边界条件，而微分方程(1.11-32)仅为二阶。我们有足够的任意常数去满足全部的边界条件吗？根据实际情况来看，回答是：否。然而进一步的研究指出，必

须联合方程(1.11-32)与方程(1.11-36),才能得到一般载荷 F 作用下梁的微分方程。于是一般方程必须是

$$w = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\,\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2}\right) \qquad (11.\text{-}40)$$

它是四阶微分方程,能够处理四个边界条件。在等截面梁的情况下有:

$$EI\,\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} = w(x) \qquad (1.11\text{-}41)$$

方程(1.11-40)是一个近似方程,它仅仅在棱柱形梁的纯弯情况下才是精确的。但我们却常常利用它来描述一般情况下甚至变剖面梁的挠度。通常它为细长梁提供了一个很好的近似解。只有当梁不是很细长,或是用很软的材料做芯子构成夹心结构的情况下,才会产生明显的偏差,因为这两种情况下剪切挠度都很大。

习 题 1

1.1 冰熔解时体积略有减小,这是水分子在结冰时重新排列的结果。找一些与此类似的宏观例子,即改变物体的结构使之更容易变形。

1.2 当预混混凝土卡车将混凝土灌入建筑场地基时,混凝土可作为连续流体处理。类似地,稻谷在地下仓库的粮食滑道上流动时也可看成流体。日晕,太阳黑子,火山爆发后的熔岩也同样可看成流体来处理。举 10 个以上的例子描述这种固体能像流体流动的现象,并且连续介质概念能适用于这些情况。

1.3 考虑这样一种情况,你将乘宇宙飞船返回地球。你将面临进入地球大气层时摩擦生热的问题。对于气体,碰撞间平均自由程的长度是分子之间平均距离的一种量度。对地面上 1km 处的空气,平均自由程是 8×10^{-6} cm;在 100km,它是 9.5cm;在 200km,它是 3×10^4cm。在分析再入大气层的宇宙飞船周围的空气流时,允许用连续介质力学的方法吗?在什么范围和什么样的目的下,空气可当作连续介质?从安全考虑,你将不得不解决哪些问题?

1.4 假设你是外科医生,有个病人的皮肤上有一个圆形的 1cm 左右的肿瘤块需要切除。该病变皮肤切除后,需要移植一块正常皮肤在切除部位

上。这里给了工程师一个解决问题的机会。请创造一种方法以使该手术获得最好的结果。首先应确定“最好”的含意，正常皮肤怎样在手术中存活？你期望哪种治愈过程？你想看到的最后结果是什么？你能将皮肤看成连续介质吗？你将用连续介质概念的哪种方法处理这个问题？对不同的瘤变部位（例如：在脸上，手上，背上或腹部），你会用不同的方法吗？

1.5 在一个城市要建一座 100 层楼的高楼。要求你设计一座在建筑过程中运送重物的升降机。作几种不同的设计方案，并从中选出一个方案，解释选择这个方案的理由。

1.6 一个工程师看到一个如图 $P1.6(a)$的简单桁架。他感到在这个桁架上加上一个元件 AB 能使之更安全，如图 $P1.6(b)$所示。这样桁架上无论元件 AB、CD、AC、BD 和 AD 的哪一个由于意外事件而断裂，该桁架都不会立即倒塌。现在，具有自动防止故障的结构日趋受到重视，特别是像飞机、桥梁和轮船这类交通工具和设施。由于引入的元件 AB 改变了桁架的特征，为更好地理解该问题，需首先分析图 $P1.6(a)$所示桁架上每个元件的受力情况。然而，你将发现你不能确定图 $P1.6(b)$所示桁架上每个元件的受力情况，为什么呢？还需哪些附加条件呢？用这些附加条件你如何确定所有元件的受力呢？你所注意到的这种安全的价值是什么？

注：如图 $P1.6(b)$所示的桁架称为静不定结构，这是由于桁架上各杆的受力情况不能由静态唯一确定。

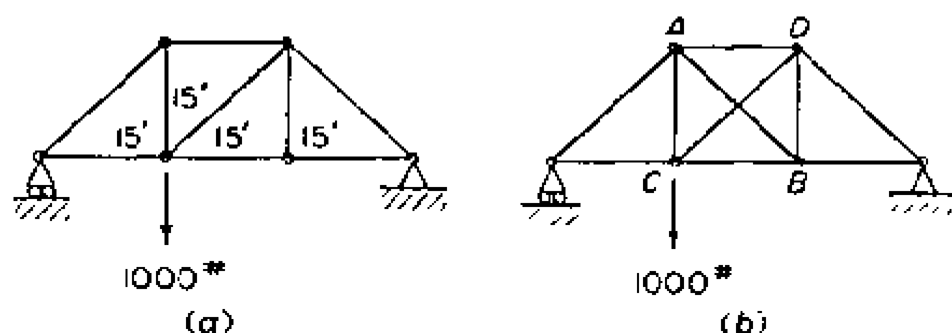


图 $P1.6$

(a)静定梁；(b)静不定梁

1.7 伽里略在他的《两种新科学》一书中提出如下的问题：一个大理石柱，像简支梁那样支在两个支点上。罗马的市民们担心柱的安全而设法增加一个支点。他们在跨度的中央插进了第三支点，如图 $P1.7$，但柱在该处破坏了。为什么？



图 $P1.7$ 伽里略的大理石柱问题

1.8 当我们用脚尖直立，或者做一个跳跃平衡动作时，前交叉肋带中的拉力是相当大的，说明这一点很容易。应用与测量弓弦中或橡皮弹弓中拉力时所用的相同的原理，可以制造一个拉伸计。试设计这样一个拉伸计。

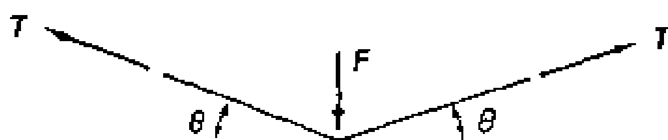


图 $P1.8$ 弦中拉力的测量

提示 如果我们拉弓，如图 $P1.8$ 所示，并且侧向力 F 引起挠度角 θ，证明 $T=F/(2\sin\theta)$。

1.9 试比较下面一些情况中，作用在腰椎水平处脊柱上的弯矩：

(*a*)秘书弯下身体，捡起地板上一本书，(*i*)她的膝直立，(*ii*)她的膝弯曲。

(*b*)一个滑雪者滑行，(*i*)其手臂伸直；(*ii*)其肘抱着腰。

试用适当的自由体图定量地讨论这些情况。

1.10 医生总是把手指放在动脉上"把脉"。为解释他这样做能诊病，我们可考察如下一个简单情况。

一个小气球充以空气，其内压比大气压的外压大 P 帕。用我的手指头压在气球上，我需要往下压多少？作用在指上的压力刚好是 P？假设略去壁的弯曲抗力。

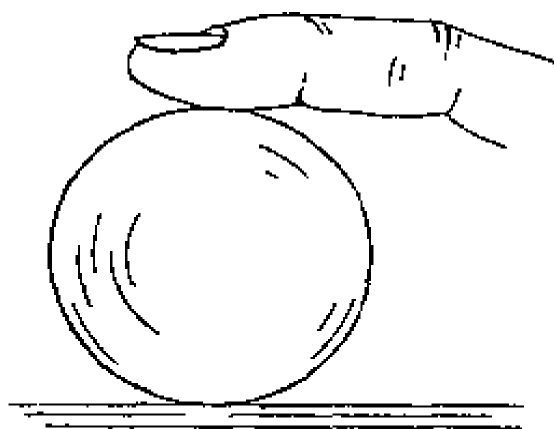


图 $P1.10$ 感觉气球内的压力

提示 考察手指下气球的一小片的自由体图。考虑手指下的部位变为一个平面时的条件。

1.11 一个男人是另一个男人的两倍高。假设他们完全相似，并正好做同样姿势的体操动作。在他们骨头和肌肉里承受相同的应力吗？

答案　线性尺寸比是 2，相应的器官的质量比是 8，相应的面积比是 4，应力比是 2。

1.12　肥皂泡内气体压力为 p，$p=4\sigma/R$ 表示 p 与表面张力 σ 和半径 R 的关系。用已知的拉普拉斯定律(Laplace's)试推导这个方程。

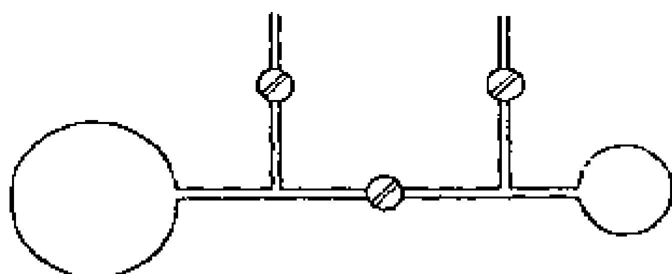


图 P1.12　小肥皂泡缩进大肥皂泡内

取一个吸量管，中间装一个活门，关住它。吹两个气泡，一端一个：一个是大气泡，一个是小气泡。现在，打开中间的活门，使得两个泡中的气体能够相互运动，试问两个泡的直径如何变化？请详细解释。

答案　小气泡将消失。

1.13　当人吸气时，空气依次进入口、鼻、气管、支气管、细支气管及肺泡管和肺泡末端，即呼吸的最末单位。大多数的生理教科书都将肺泡看成是习题 1.12 情况下的气泡。人的肺包含有 3 亿个这样的小泡同时与大气进行气体交换。现在用习题 1.12 的结论来说明这个问题，显然从中不应得到这样的结论：除最大的肺泡外其余所有的肺泡都在吸气时坍陷了。这样的肺就只含有一个开放的肺泡，这显然是荒谬的。哪里出了错呢？正确的答案是什么呢？

提示：哺乳动物的肺是如此精妙地组成，以至每一个肺泡的壁也同时是另外两个相邻肺泡的壁。因此，肺泡壁更准确地应该说成是肺泡中隔，用气泡去类比肺泡是不正确的。

1.14　令 M 表示梁中的弯矩，S 表示剪力，w 是载荷。试按照图 P1.14 所示的自由体图证明

$$S=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x},\quad w=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=W$$

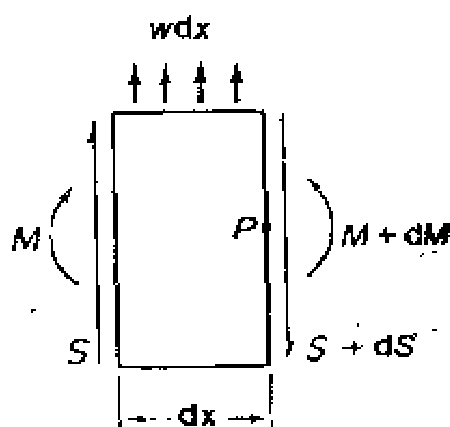


图 $P1.14$　一段梁的平衡

1.15　利用问题 1.14 中推导的微分方程，试求图 $P1.15(a)$和(b)中所示梁在单位长度的载荷

$$w = a\sin\frac{\pi x}{L}$$

作用下的弯矩分布。

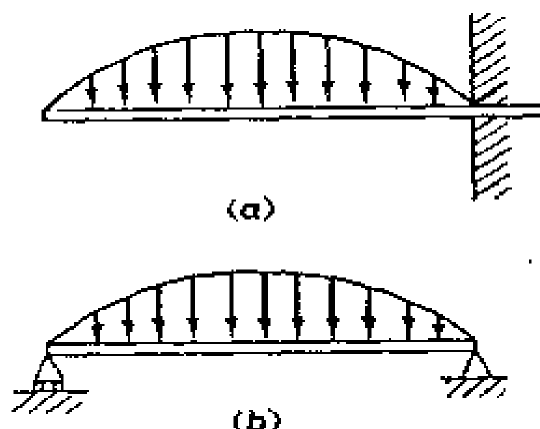


图 $P1.15$　在正弦分布载荷作用下梁的弯曲

(a)悬臂梁即一端自由另一端固定；(b)简支梁

1.16　一个重 W 磅的人试图走过两端简支在河的两岸的一块木板，只要弯矩超过 M_{cr}，木板就会破坏。试问在何处(x)木板会破坏，人掉进河中。

答案　$x=\frac{1}{2}[L\pm(L^2-4K^2)^{1/2}]$，其中 $K=LM_{cr}/W$。

1.17　一悬臂梁承受常值力 P，如图 1.17 所示。如果在它的左端加上一个铰支座，你能画出弯矩图吗？

这个问题称为静不走问题，原则上将如何解决这一问题？

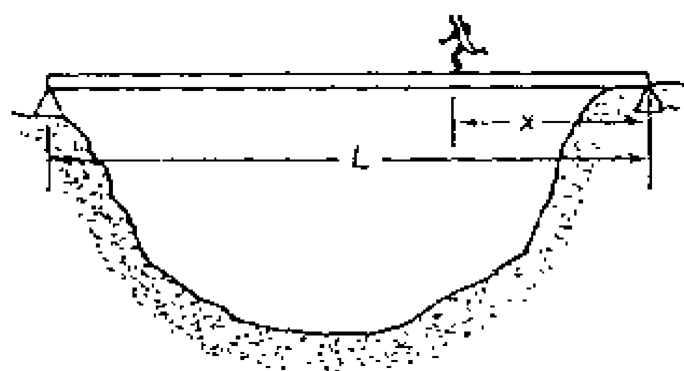


图 $P1.16$ 一个人走过一块木板

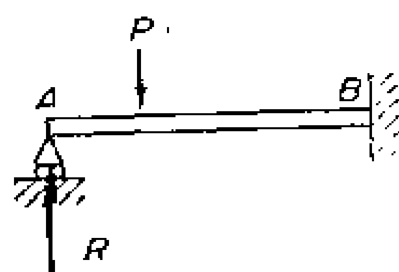


图 $P1.17$ 多余支承

解 一个梁在 B 点固支，同时在 A 点简支，它在 A 点的阻力不能单独由静力学算出，所以称它为静不定梁。为解决这一问题，我们必须考虑梁的弹性。

下面介绍一种方法。取走 A 点处的支座，则梁成为一悬臂梁。我们能够求得载荷 P 引起的 A 点的挠度。设它为 $\delta_A^{(P)}$，它与 P 成正比。

其次，考察端部受 R 力的同一个悬臂梁。这引起 A 端的挠度为 $\delta_A^{(R)}$。实际上，A 端是不移动的，因此 $\delta_A^{(R)}+\delta_A^{(P)}=0$。我们可根据这个方程计算 R。已知 R 后，我们就能完成弯矩图。

1.18 一个梁支承在三个铰支座上（图 $P1.18$），它不像加里略的石块，而是刚性地连结在基础上，从而既能承压又能承拉。试拟定一个能够计算梁内应力分布的方法。

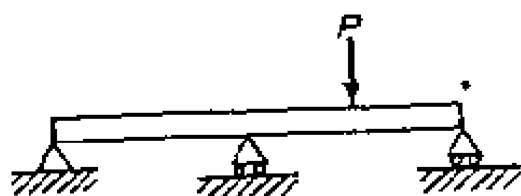


图 $P1.18$ 静不定支承

解 首先去掉一个支座，使得问题成为静定的。计算由于载荷 P 而在除去支座的位置处所产生的挠度。接着，在去掉支座的位置上作用一个力 R，并计算该点的位移。

所有支点处最后的净位移必须为零的条件提供了计算反作用力 R 的方程。从而所有力均能知道并能完成弯矩图。

1.19 一阵强风吹到棕榈树上，如图 $P1.19$。在树干上每单位长度的风载是 $w=kD$，其中 D 是树干局部地方的直径，k 是一常数。该树干直径应怎

样随高度变化才能使从顶部到根部对风的弯曲是等强度的？注意树干横剖面的惯性矩与 D^4 成正比，外层纤维的弯曲应力正比于 $Mc/I \sim MD^{-3}$，其中 M 为弯矩。略去树叶产生的弯矩

提示　设 x 和 ξ 是由树顶向下测量的。在 x 处的弯矩是

$$M(x) = \int_0^x (x-\xi)KD(\xi)\mathrm{d}\xi。$$

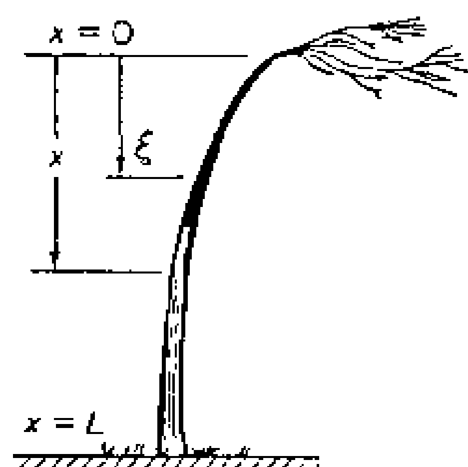


图 $P1.19$　强风吹到棕榈树上

在 x 处的最大弯曲应力正比于 $M(x)/D^3(x)$。这样，问题就是要确定一个使 $M(x)/D^3(x)$ 为常数的 $D(x)$。试取一幂规律，例如 $D(x)=$ 常数 $\cdot x^m$，并且证明 $m=1$。该树干看来像是一个细长的锥体。

1.20　空气动力学理论中最出色的理论之一认为：使一架飞机具有最小诱导阻力（举起重量所引起的对向前运动的空气阻力）的最好设计是具有椭圆分布载荷的设计。这里的载荷指的是每单位翼展的气动举力。椭圆分布载荷的意思是从翼尖到翼尖的举力分布是椭圆的。令 x 是从飞机中心线测量起沿翼展的距离。令 b 是半翼展（从中心线到翼尖的距离），因此这个定理的意思是，如果举力按照公式

$$l(x) = k\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}$$

分布，其中 k 是常数，就可获得最小诱导阻力。这个举力分布最节省燃油。

假设飞机有椭圆分布载荷。把机翼当作悬臂梁，试计算机翼中 x 处的弯矩 $M(x)$。绘制弯矩图以表示气动载荷在机翼各处所引起的弯矩。

如果升力分布近似地由方程 $l(x)=A\cos(\pi x/2L)$ 描述，机翼的弯曲刚度为 $EI(x)$，求出机翼尖顶部相对于根部的挠度。

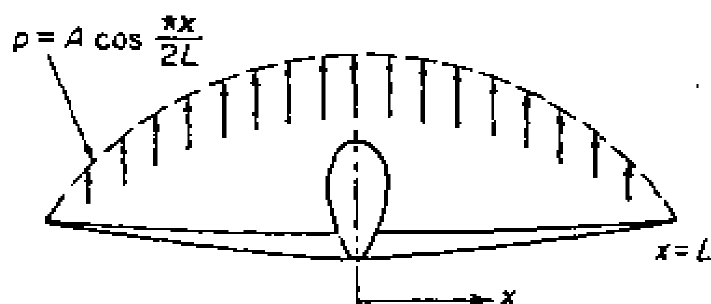


图 $P1.20$　作用在机翼上的最优的椭圆分布的空气动力载荷

1.21　红细胞是一个薄壁轴对称的无孔炸面饼圈形状的壳体，如图 $P1.21$，人们常称之为双凹碟盘状。红细胞内充满牛顿流体，并浸浮在另一种牛顿流体中。在细胞膜弯曲刚度被忽略的假设下，只要作出合适的红细胞的自由体图，我们就能计算出它的内压力 p_i 与外压力 p_e 之差。你能得出什么结论？该结论在生理上有何重要意义？

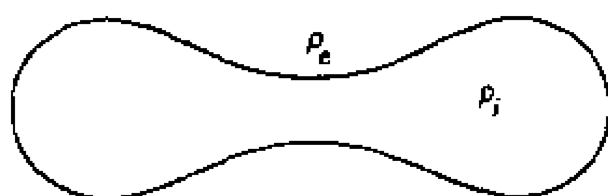


图 $P1.21$　悬浮在等渗溶液里的红细胞
从通过中心的横截面看是轴对称的

1.22　图 $P1.22(a)$表示一个人在工作。图 $P1.22(b)$表示由一通过腰部脊椎盘的横截面切割的人身体的上部。图 $P1.22(c)$表示腰部脊椎盘的结构，椎间盘可作为旋转的支点；它不能抵抗弯矩和扭矩。在抵抗外力时，脊椎骨、椎间盘和肌肉都受应力作用。位于椎间盘中心迹线后的主要肌肉是脊椎竖立肌，该肌肉的中心迹线位于椎间盘中心后于约22%深度处。对一个作用力为 W，力矩臂长为 L 的载荷，作用于椎间盘的弯矩是多少？作用在脊椎竖立肌上的张力是多少？设这个人与你自己的尺寸一样。

下背部的疼痛是一件伤脑筋的常见病，以至有时得用应变片来测量作用在病人的盘状物上的力。曾发现，当举起一个很沉的重量时，如果不考虑他绷紧自己的腹肌使得腹部内的压力增加这一事实的话，就得不到相符的结果。图 $P1.22(b)$表示一个男人上半身的自由体图。试证明有一个大的腹部和一个强壮的腹肌，对这种劳动是有帮助的。

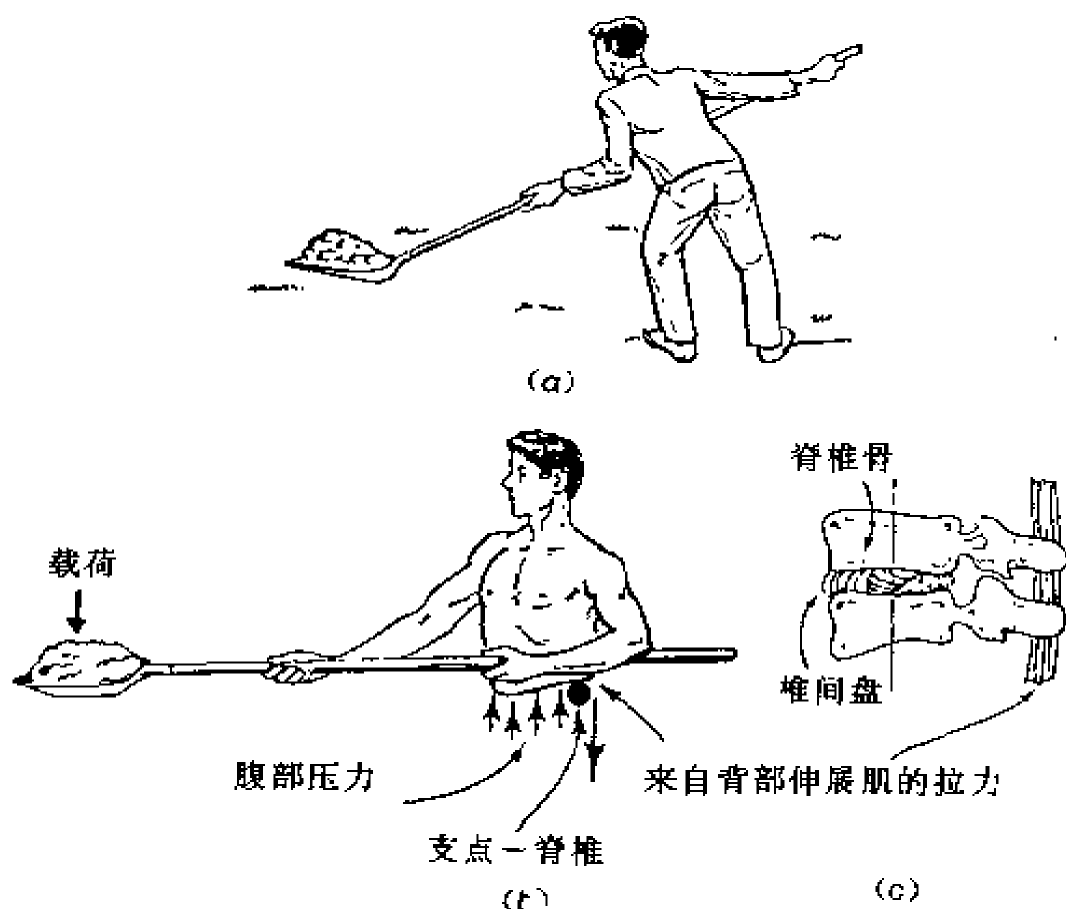


图 $P1.22$　当一个人铲重物时脊椎骨中的载荷

参考：Schultz, A. B., *and* Ashton-Miller, J. A.: "*Biomechanics of human spine.*" *In Basic Orthopaedic Biomechanics*, ed. by V. C. Mow *and* W. C. Hayes, Raven Press, New York, 1991, *pp*. 337～364.

1.23　图 $P1.23$ 是从伯努利(*Giovanni Alphonso Borelli*, 1608～1679)的一本书《*De Motu Animalium*》(关于动物的运动)中摘取的。该书于 1680 年(第一部分)和 1681 年(第二部分)出版。最近由 *P. Maquet* 翻译出来。这幅图显示了一个人搬运一个重物的情况。有几个部分被剖开以显示骨和肌肉是如何工作的。当然用自由体图能作进一步的阐明。试估计当一个 $70kg$ 的人扛一个 $30kg$ 的球行走时作用在髋关节的作用力大小。

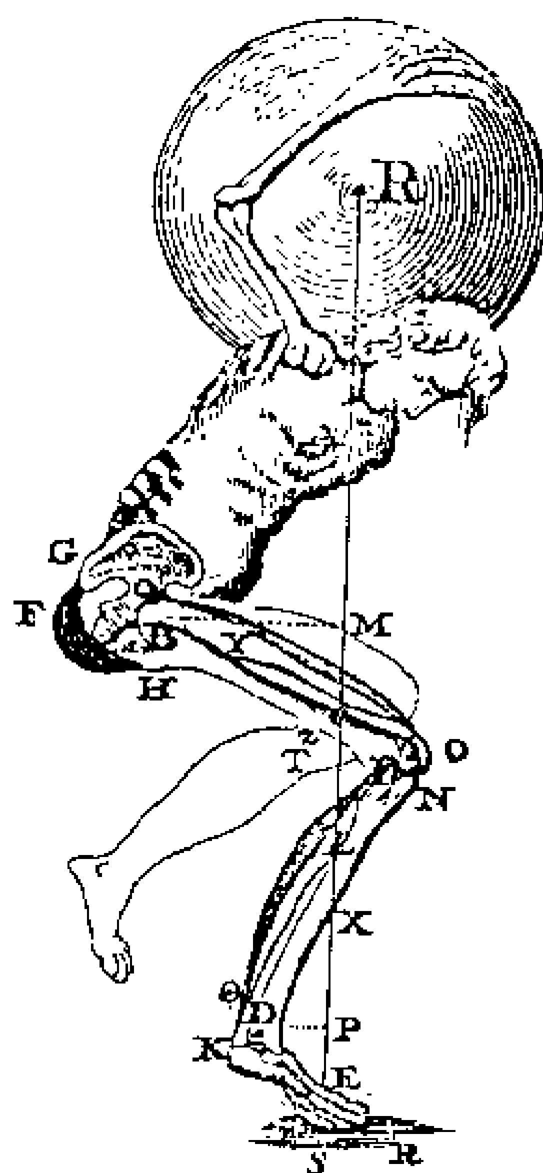


图 P1.23　摘自伯努利所著书中的图(*Table VI,Fig*1)

2 向量和张量

一个美丽的故事，需要用美丽的语言描绘。张量是力学的语言。

2.1 向量

在三维欧几里德空间内的向量定义为具有一给定大小和方向的有向线段。我们用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PQ}$，…，或用粗体字母 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{T}$，…，表示向量。

如果两个向量具有同样的大小和方向，则这两个向量相等。单位向量是大小为 1 的向量。用 0 表示的零向量是大小为零的向量。我们用 $|\overrightarrow{AB}|$、$|u|$、v 分别代表$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 的大小。

两个向量的和是用“平行四边形定律”得到的另一个向量，例如，可写为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$。向量加法遵从交换律和结合律。

用一个数乘一个向量产生另一个向量。若 k 是一个正实数，则 $k\boldsymbol{a}$ 表示方向与 a 相同，大小为 k 倍大的一个向量。如若 k 是负的，则 $k\boldsymbol{a}$ 是一个大小为 a 的 $|k|$ 倍，但方向与 a 相反的向量。若 $k=0$，则有 $0\cdot\boldsymbol{a}=0$。

向量的减法可以定义为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

如令 e_1，e_2，e_3 分别是 x_1，x_2，x_3 轴正方向的单位向量，我们可

以看到坐标轴为 x_1, x_2, x_3 的三维欧几里德空间中的每一个向量都可以用 e_1, e_2 和 e_3 的线性组合来表示。而且，若向量 $\boldsymbol{u}$ 用线性组合表示则有

$$\boldsymbol{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \tag{2.1-1}$$

其中 u_1, u_2, u_3 是 $\boldsymbol{u}$ 的分量，$\boldsymbol{u}$ 可以用矩阵 (u_1, u_2, u_3) 表示。

那么 $|\boldsymbol{u}|$ 的大小为

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \tag{2.1-2}$$

因此，仅当 $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ 时，$\boldsymbol{u} = 0$。

$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的数量积(或点积)用 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ 表示，可用公式定义为

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |u||v|\cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi), \tag{2.1-3}$$

式中 θ 是给定向量之间的夹角。这个表达式代表了一个向量的大小和第二个向量在第一个向量方向上分量的乘积，即

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} \text{ 的大小})(\boldsymbol{v} \text{ 沿 } \boldsymbol{u} \text{ 的分量}) \tag{2.1-4}$$

如果

$$\boldsymbol{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 \qquad \boldsymbol{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

这两个向量的数量积也可以用分量来表示：

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{2.1-5}$$

两个向量的数量积是一个数量，而两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的向量积(或叉积)则产生另外一向量 $\boldsymbol{w}$；我们写为 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$。$\boldsymbol{w}$ 的大小定义为

$$|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi), \tag{2.1-6}$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角，$\boldsymbol{w}$ 的方向规定为垂直于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 所决定的平面，依此法 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 形成右手系法则。向量积满足下列关系：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) \\
&\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} \\
&\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0 \\
&\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0 \\
&\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \\
&k\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times k\boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}).
\end{aligned} \tag{2.1-7}$$

利用这些关系，可将向量积用分量表示如下：

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{e}_1+(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{e}_2+(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{e}_3. \tag{2.1-8}$$

2.2 向量方程

向量分析实质是用符号来代表物理量或几何量，用一个方程表示一个物理关系或一个几何事实。例如，如果有一个质点，作用于其上的力为 $\boldsymbol{F}^{(1)},\boldsymbol{F}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{F}^{(n)}$，那么，我们可以说，这个质点的平衡条件是

$$\boldsymbol{F}^{(1)}+\boldsymbol{F}^{(2)}+\cdots+\boldsymbol{F}^{(n)}=0. \tag{2.2-1}$$

作为另外一个例子，我们讲，如果 $\boldsymbol{n}$ 是一个单位向量，p 是一个常数，那么下面的向量 $\boldsymbol{r}$ 的方程代表一个平面：

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=p \tag{2.2-2}$$

这种表达的意思是，满足上述方程的向径 $\boldsymbol{r}$ 的端点轨迹是一个平面。几何意义是很清楚的。称为平面的单位法向量的向量 $\boldsymbol{n}$ 是确定的。数量积 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ 代表 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的数量投影。方程(2.2-2)说明，如果考察在 $\boldsymbol{n}$ 上的分量是一常数 p 的所有向径 $\boldsymbol{r}$，则将得到一个平面。(参见图 2.1)。

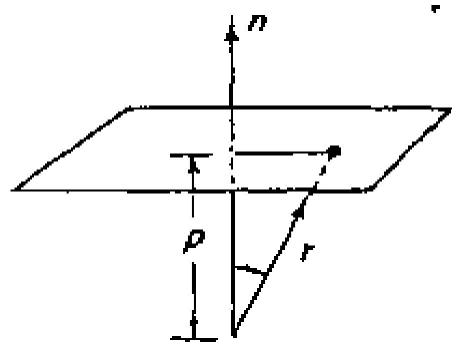


图 2.1 平面方程 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=p$.

另一方面，虽然向量方程式很精简，但并不总是很方便。面笛卡儿引入解析几何在那里向量用它们对于固定参考标架的分量表示，确实是一个很大的贡献。那么，对于一组直角笛卡儿坐标轴 $O-xyz$，方程(2.2-1)，和(2.2-2)可分别写为

$$\sum_{i=1}^{n}F_x^{(i)}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_y^{(i)}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_z^{(i)}=0, \tag{2.2-3}$$

$$ax+by+cz=p, \tag{2.2-4}$$

式中 $F_x^{(i)}, F_y^{(i)}, F_z^{(i)}$ 代表向量 $F^{(i)}$ 对于参考标架 $O-xyz$ 的分量；x，y，z 代表 $\boldsymbol{r}$ 的分量；a、b、c 代表单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的分量。

为什么选择解析形式？为什么我们愿意牺牲向量符号的简洁性呢？回答是人们喜欢用数字来表示物理量。要确定一个向径，用一组三个数 (x,y,z) 是很方便的。要确定一个力 $\boldsymbol{F}$，定义三个分量 F_x, F_y, F_z 是很方便的。事实上，在实际计算中，我们经常更多地应用方程(2.2-3)和(2.2-4)，而不是方程(2.2-1)和(2.2-2)。

2.3 求和约定

为了进一步推导，必须熟悉一个重要的符号法则。

通常用 $x_i, i=1,\cdots,n$。表示一组 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。当单个写时，符号 x_i 表示变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的任何一个。在每一种情况下必需指出 i 的范围；最简单的写法，就是此处所说明的，$i=1, 2, \cdots, n$。符号 i 是一个指标。指标可以是下标或者是上标。应用指标的符号系统称为指标符号。对于直角笛卡儿参考标架 x_1, x_2, x_3，考察描述三维空间的一个平面方程，即

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p, \tag{2.3-1}$$

式中 a_i 和 p 是常数。这个方程可以写为

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = p. \tag{2.3-2}$$

然而，我们将引入**求和约定**，并以简单的形式写出上述方程式

$$a_i x_i = p. \tag{2.3-3}$$

约定如下：在同一项内的一个指标的重复，将表示对该指标在它的范围上**遍历求和**。指标 i 的**范围**是从 1 到 n 的 n 个整数值的集合。一个指标，当它求和时称为**哑指标**；不求和时称为**自由指标**。

因为哑指标是表示求和，所以它应用什么符号无关紧要。那么，a_ix_i 可与 a_jx_j 等同。这类似于积分中的哑变量，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

举例

指标和求和约定的使用，可用另外的例子说明。在直角笛卡儿坐标 x，y，和 z 的三维欧几里得空间内，考察一个单位向量 ν。令方向余弦 α_i 定义为

$$\alpha_1 = \cos(\nu, x), \quad \alpha_2 = \cos(\nu, y), \quad \alpha_3 = \cos(\nu, z),$$

式中 (ν, x) 表示 ν 和 x 轴间的夹角，等等。数 $\alpha_i (i=1,2,3)$ 的集合表示单位向量在坐标轴上的分量。事实上向量的长度是 1 用方程表示为

$$(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2 = 1,$$

或者，简写为

$$\alpha_i \alpha_i = 1 \tag{2.3-4}$$

另一种表明是，在直角笛卡儿坐标 x，y，z 的三维欧几里德空间内，考虑分量为 dx，dy，dz 的线元素。线元素长度的平方是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.3-5}$$

如果定义

$$dx_1 = dx, \quad dx_2 = dy, \quad dx_3 = dz, \tag{2.3-6}$$

和

$$\begin{aligned} &\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \\ &\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0, \end{aligned} \tag{2.3-7}$$

那么，方程(2.3-5)可以写为

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j, \tag{2.3-8}$$

指标 i 和 j 的范围应理解为 1 到 3。注意，在这个表达式中，有两个求和，一个对 i，一个对 j。在方程(2.3-7)中定义的 δ_{ij} 称为克罗内克符号(Kronecker delta)

矩阵和行列式

矩阵代数法则和行列式等价可以简单地用求和约定表示。一个 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 是 mn 元素一阶矩形阵列。记为

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.3-9}$$

那么，a_{ij}元素是矩阵 A 的第 i 列和第 j 行的元素。指标 i 取值为 1，2，…，m，而指标 j 取值为 1，2，…，n。A 的转置矩阵是另一矩阵，用 A^T 表示，它们的元素与 A 中的元素相同，只是，列数和行数相互交换。因此，

$$A^T = (a_{ij})^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{2.3-10}$$

两个 3×3 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$的乘积是一个 3×3 平方矩阵，并定义为

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \cdots \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & \cdots \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.3-11}$$

在第 i 列和第 j 行的那些元素，用求和约定可以写为

$$(A \cdot B)_{ij} = (a_{ik}b_{kj}) \tag{2.3-12}$$

一个向量 u 可以用一列矩阵(u_i)表示，那么方程(2.1-2)可以写为

$$|u|^2 = (u_i) \cdot (u_j)^T = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u_iu_i. \tag{2.3-13}$$

用这个准则，两个向量 $u \cdot v$ 的标量积，方程(2.1-3)可以写为

$$u \cdot v = (u_i)(v_i)^T = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = u_iv_i. \tag{2.3-14}$$

一个方阵的行列式是矩阵单元的每行和每列乘积的总和，任意行和列不多于两个。以简单的规则用记号确定。例如，3×3 矩阵 A 的行列式写为 det$A$ 并且定义如下：

$$\det A = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (2.3\text{-}15)$$

记号的特别规则如下：首先看顺序排列 1,2,3 的第一个指标，然后看顺序的第二个指标。如果它们的排列是 1,2,3,1,2,3,…，那么符号是正的；反之符号是负的。

让我们引进一个特别的符号，ε_{rst}，称为置换符号并用公式定义为

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{111}=\varepsilon_{222}=\varepsilon_{333}=\varepsilon_{112}=\varepsilon_{121}=\varepsilon_{211}=\varepsilon_{221}=\varepsilon_{331}=\cdots=0,\\&\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\\&\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=-1.\end{aligned} \qquad (2.3\text{-}16)$$

即是说，任何时候任意两个指标若相同，ε_{ijk} 为零；当下标序列是 1,2,3 时 $\varepsilon_{ijk}=1$；反之 $\varepsilon_{ijk}=-1$。那么，矩阵 (a_{ij}) 的行列式可以写为

$$\det(a_{ij})=\varepsilon_{rst}a_{r1}a_{s2}a_{t3} \qquad (2.3\text{-}17)$$

应用符号 ε_{rst}，我们可以把方程(2.1-8)定义的向量积 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 写为

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\varepsilon_{rst}u_s v_t \boldsymbol{e}_r \qquad (2.3\text{-}18)$$

ε—δ 恒等式

克罗内克符号(Kronecker *delta*)和置换符号是非常重要的量，它们将在本书中一再出现。它们用下面恒等式联系起来。

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks}. \qquad (2.3\text{-}19)$$

我们要常常用到这个 ε—δ 恒等式，故在这里必需予以特别注意。这个恒等式实际上可用试探法来验证。

微分法

最后，我们将把求和约定推广到微分公式。令 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数。那么，它的微分应写为

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n=\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i. \qquad (2.3\text{-}20)$$

2.4 坐标的平移和旋转

二维空间

考察平面上的两组直角笛卡尔参考标架 $O-xy$ 和 $O'-x'y'$。如果参考标架 $O'-x'y'$ 是由 $O-xy$ 的原点移动但无方向的变化得到的，那么，这种变换是平移。如果一点 P 对原、新坐标参考标架的坐标分别是$(x、y)$和(x',y')，那么

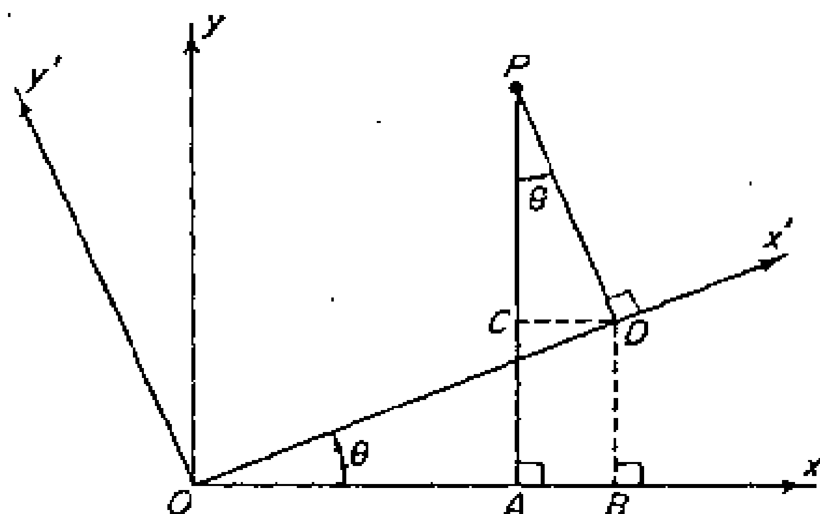


图 2.2 坐标的旋转

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k. \end{cases} \tag{2.4-1}$$

如果原点保持固定，把 ox 和 oy 反时针旋转一个角度 θ，得到新轴，那么，轴的变换就是旋转。让 P 的原、新坐标分别为(x,y)和(x',y')。那么(参见图 2.2)

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.4-2}$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= - x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.4-3}$$

应用指标符号，令 x_1、x_2 代替 x、y 而 x'_1、x'_2 代替 x'、y'。那么，显然(2.4-3)方程所描述的旋转就可以用下面的方程

$$x'_i = \beta_{ij}x_j,(i = 1,2) \tag{2.4-4}$$

式中 β_{ij}是方阵的元素：

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (2.4\text{-}5)$$

式(2.4-4)的逆变换是

$$x_i = \beta_{ji} x'_j, (i = 1,2) \qquad (2.4\text{-}6)$$

式中，按照(2.4-2)，β_{ji}是矩阵(β_{ij})的第 j 行，第 i 列的元素。显然，(β_{ji})矩阵是(β_{ij})矩阵的转置，即

$$(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^T. \qquad (2.4\text{-}7)$$

另一方面，从求解一组联立线性方程(2.4-4)的观点来看，方程(2.4-6)中的矩阵(β_{ji})必须等于矩阵(β_{ij})的逆，即

$$(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^{-1}. \qquad (2.4\text{-}8)$$

于是，我们得到了定义直角笛卡儿坐标旋转的变换矩阵(β_{ij})的一个基本特性：

$$(\beta_{ij})^T = (\beta_{ij})^{-1}. \qquad (2.4\text{-}9)$$

满足方程(2.4-9)的矩阵(β_{ij})，i、$j=1$、2、…，n，称为正交矩阵。如果变换对应的矩阵是正交矩阵，变换就称为正交变换。定义坐标旋转的矩阵(2.4-5)是正交矩阵。

对于一个正交矩阵，有

$$(\beta_{ij})(\beta_{ij})^T = (\beta_{ij})(\beta_{ij})^{-1} = (\delta_{ij}),$$

式中 δ_{ij}是克罗内克符号。因此，

$$\beta_{ik}\beta_{jk} = \delta_{ij}. \qquad (2.4\text{-}10)$$

为了阐明这个重要方程的几何意义，我们重新直接推导旋转变换如下。从原点出发，并沿着 x'_i 轴的一个单位向量，对 x_1，x_2 轴的方向余弦分别是 β_{i1}、β_{i2}。事实上，单位向量的长度是 1 用下面的方程表示

$$(\beta_{i1})^2 + (\beta_{i2})^2 = 1, \quad (i = 1,2). \qquad (2.4\text{-}11)$$

如果 $j\neq i$，沿 x'_i 轴的单位向量垂直于沿 x'_j 的单位向量，这一事实由下式表示

$$\beta_{i1}\beta_{j1} + \beta_{i2}\beta_{j2} = 0, \quad (i \neq j). \qquad (2.4\text{-}12)$$

联合方程式(2.4-11)和(2.4-12)，我们可得方程(2.4-10)。

注：另一方法，因为我们从(2.4-5)知道 β_{ij}是什么，所以我们可以用直接计算的办法来验证方程(2.4-10)。

三维空间

显然，上面的讨论可以不费力地推广到三维。指标 i,j 的范围可以扩展到1,2,3。因此，考察具有同样原点 O 的两个右手直角笛卡儿坐标系 x_1,x_2,x_3 和 x'_1,x'_2,x'_3。令 x 表示具有分量 x_1,x_2,x_3 或 x'_1,x'_2,x'_3 的一点 P 的位置向量。令 e_1,e_2,e_3 是 x_1,x_2,x_3 轴正方向的单位向量。他们称为 x_1,x_2,x_3 坐标系的基向量。令 e'_1,e'_2,e'_3 是 x'_1,x'_2,x'_3 坐标系的基向量。注意到，因为坐标是正交的，我们有

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij},\quad e'_i\cdot e'_j=\delta_{ij}.\qquad(2.4\text{-}13)$$

依据基向量，向量可以表示如下：

$$x=x_je_j=x'_je'_j.\qquad(2.4\text{-}14)$$

方程(2.4-14)两边与 e_i 的数量积给出

$$x_j(e_j\cdot e_i)=x'_j(e'_j\cdot e_i).\qquad(2.4\text{-}15)$$

但是

$$x_j(e_j\cdot e_i)=x_j\delta_{ij}=x_i;$$

因此，

$$x_i=(e'_j\cdot e_i)x'_j.\qquad(2.4\text{-}16)$$

现在，定义

$$(e'_j\cdot e_i)\equiv\beta_{ji};\qquad(2.4\text{-}17)$$

那么，

$$x_i=\beta_{ji}x'_j,\quad(j=1,2,3).\qquad(2.4\text{-}18)$$

其次，用 e'_i 点乘(2.4-14)两边，可得

$$x_j(e_j\cdot e'_i)=x'_j(e'_j\cdot e'_i).$$

但是$(e'_j\cdot e'_i)=\delta_{ij}$和$(e_j\cdot e'_i)=\beta_{ij}$；因此，得到

$$x'_i=\beta_{ij}x_j,(i=1,2,3).\qquad(2.4\text{-}19)$$

方程(2.4-18)和(2.4-19)是方程(2.4-4)和(2.4-6)在三维情况的推广。

方程(2.4-17)示出系数 β_{ij}的几何意义。因为方程(2.4-18)和(2.4-19)互为逆变换,因此方程(2.4-7)和(2.4-8)对 $i,j=1、2、3$ 情况显然存在。因此,就得到方程(2.4-9)和(2.4-10)。

现在,代表图中 P 点坐标的数 $x_1、x_2、x_3$ 也是向径 A 的分量。由这个事实我们立刻得出在直角笛卡儿坐标中一个向量分量的变换规律

$$A'_i = \beta_{ij}A_j, \quad A_i = \beta_{ji}A'_j, \tag{2.4-20}$$

式中 β_{ij}表示 Ox'_i 和 Ox_j 两轴间的夹角余弦。

最后我们指出,沿 x'_1,x'_2,x'_3 的三个单位向量形成了体积为 1 的立方体的边。以任意三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 为边的平行六面体的体积或者等于三重积 $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$,或者等于它的负值;按照三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 的次序是否形成右手螺旋系来确定它的符号。如果它们是右手螺旋系,那么体积就等于它们分量的行列式:

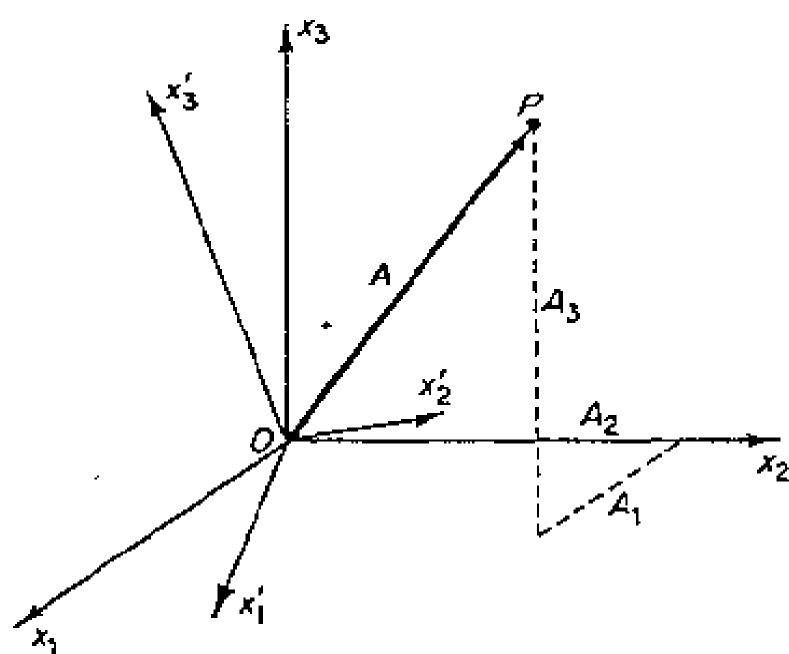


图 2.3 径向量和坐标

$$体积 = (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{2.4-21}$$

假设 x_1,x_2,x_3 和 x'_1,x'_2,x'_3 是右手系。那么,显然 β_{ij}的行列式表示单位立方体的体积,因此,其值为 1:

$$|\beta_{ij}| = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 1. \tag{2.4-22}$$

2.5 一般坐标变换

一组独立变量 x_1,x_2,x_3 指定为在某一参考标架中的坐标。通过方程

$$\bar{x}_i = f_i(x_1,x_2,x_3), \quad (i=1,2,3) \tag{2.5-1}$$

把变量 x_1,x_2,x_3 变成一组新变量 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$。逆变换

$$x_i = g_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3), \quad (i=1,2,3) \tag{2.5-2}$$

按反方向进行。为了保证这种逆变换是存在的并且在变量(x_1,x_2,x_3)的某个域 R 内是可逆的，并且是一一对应的；即，为了域 R 内的(x_1,x_2,x_3)，由每一组数$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$能唯一地确定一组数$(x_1,x_2,x_3)$，或者相反，其充分条件是：

(1)在域 R 内，f_i 是单值，连续函数，并且具有连续的一阶偏导数。

(2)在域 R 的任意点处，雅可比行列式 $J=\det(\partial\bar{x}_i/\partial x_j)\neq 0$。即

$$J=\det\left(\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial x_j}\right)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\bar{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\bar{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\bar{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{2.5-3}$$

具有上述特性 1 和 2 的坐标变换称为容许变换。如果雅可比行列式到处为正，那么，一组右手坐标变换为另一组右手坐标，这种变换称为正常的。如果雅可比行列式到处为负，那么，一组右手坐标变换为一组左手坐标，这种变换称为非正常的。在本书中，将不言而喻地假设，我们的变换是容许的，正常的。

雅可比行列式的意义

评价雅可比行列式的意义，让我们假设，我们已经找到对应于$(\bar{x}_1^0,\bar{x}_2^0,\bar{x}_3^0)$坐标的$(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$，即它们满足方程(2.5-1)，并且要

问，是否我们可以在一点小的邻近区内找到一个逆变换。我们对方程(2.5-1)微分，得到

$$d\bar{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \quad (i = 1,2,3) \tag{2.5-4}$$

和估价在点(x_1^0, x_2^0, x_3^0)上的偏导数。方程(2.5-4)定义为向量 dx_j 对向量 $d\bar{x}_i$ 的线性变换。如果我们对 dx_j 解线性方程(2.5-4)，我们知道，只有行列式的系数不为零解才存在：

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \neq 0. \tag{2.5-5}$$

因此，只要方程(2.5-3)是确定的，在(x_1^0, x_2^0, x_3^0)的邻近区有逆存在。进一步，当 $J \neq 0$，方程(2.5-4)可求得解为

$$dx_i = c_{ij} d\bar{x}_j \tag{2.5-6}$$

式中 c_{ij}是常数。由此，已知点的一个邻近小区域，可以找到已知点的邻近小区域的一个逆变换[方程(2.5-2)的一个近似值]。因此，先前陈述的条件 1 和 2 是已知点邻近小区域内，一个逆存在的充分条件。重复应用这个论证从最初的已知点到新的已知点，可以扩展找到一个 R 域内一一对应的逆变换，由方程(2.5-2)给出。

2.6 标量、向量和笛卡儿张量的解析定义

令(x_1, x_2, x_3)和$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$是两组固定的直角笛卡儿参考坐标，它们与变换定律有关

$$\bar{x}_i = \beta_{ij} x_j \tag{2.6-1}$$

式中 β_{ij}是沿坐标轴 $\bar{x}_i$ 和 x_j 的单位向量间夹角的方向余弦。那么，

$$\beta_{21} = \cos(\bar{x}_2, x_1), \tag{2.6-2}$$

等等，逆变换是

$$x_i = \beta_{ji} \bar{x}_j. \tag{2.6-3}$$

一个称之为标量，向量或张量的量系，取决于该量系的分量是如何在变量 x_1, x_2, x_3 中定义的，以及当变量 x_1, x_2, x_3 变到 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ 时，它们又是如何变换的。

如果量系在变量 x_i 中只有单个的分量 ϕ，在变量 $\bar{x}_i$ 中只有单个的分量 $\bar{\phi}$，并且在对应点，ϕ 和 $\bar{\phi}$ 的数值相等。

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \bar{\phi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3). \qquad (2.6\text{-}4)$$

则该变量系称为数量场。

如果变量系在变量 x_i 中有三个分量 ξ_i，在变量 $\bar{x}_i$ 中有三个分量 $\bar{\xi}_i$，并且如果这些分量与下述特定规律有关，则该变量系称为向量场或 1 阶张量场。

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= \xi_k(x_1, x_2, x_3)\beta_{ik}, \\ \xi_i(x_1, x_2, x_3) &= \bar{\xi}_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)\beta_{ki}. \end{aligned} \qquad (2.6\text{-}5)$$

当 i, j 的范围为 1,2,3 时，把这些定义推广到具有 9 个分量的变量系上，如果在变量 x_1, x_2, x_3 中，它有 9 个分量 t_{ij}，在变量 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ 中有 9 个分量 $\bar{t}_{ij}$，并且这些分量与下述特定规律有关，因此，我们可定义一个 2 阶张量场。

$$\begin{aligned} \bar{t}_{ij}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= t_{mn}(x_1, x_2, x_3)\beta_{im}\beta_{jn}, \\ t_{ij}(x_1, x_2, x_3) &= \bar{t}_{mn}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)\beta_{mi}\beta_{nj}. \end{aligned} \qquad (2.6\text{-}6)$$

进一步可立刻推广到高阶的张量场。如果指标范围是 1,2，显然这些定义就可以修正到二维情况；如果指标范围是 $1, 2, \cdots, n$，这些定义就可以修正到 n 维情况，因为我们的定义是建立在由一个直角笛卡儿参考标架变换到另一个直角笛卡儿参考标架的基础之上的，所以这样定义的变量系统就称为笛卡儿张量。为简单起见，在本书中将仅使用笛卡儿张量。

关于向量和张量为什么要按此方式定义的详细说明

向量的解析定义是遵循向径的概念来设计的。众所周知，一个连接原点(0,0,0)和点(x_1, x_2, x_3)的向径体现了我们的向量概念，并用分量(x_1-0, x_2-0, x_3-0)，即(x_1, x_2, x_3)的形式将它表示成数值。从另一个参考标架的角度来看这个向量时，按照方程(2.6-1)，即向径分量的变换规律，就可以从参照原坐标的分量计算出参照新坐标的分量。我们把方程(2.6-1)推广到定义所有的向量的方程(2.6-5)，就等于讲，如果一个实体的性质像一个向径，即如果

它有一个固定的方向和固定的大小，那么我们就把这个实体称为向量。

这些评述的意图是要把一个矩阵和一个向量区别开来。我们可以把一个向量排成列矩阵的形式；但不是所有的列矩阵都是向量。例如，为了辨认我自己，我将自己的年龄、社会保险号、街道地址、邮区编码排成列矩阵。关于这个矩阵，你能说些什么呢？毫无意义！当然，它不是一个向量。

在把向量定义(2.6-5)推广到张量定义方程(2.6-6)的过程中，我们所采用的数学步骤是很自然的。这些方程是如此相似，以至于如果我们把向量称为1阶张量，就不得不把其他的称为2阶或3阶张量，等等。这些高阶张量的物理意义是什么？回答这个问题的最有效的方法是考察一些具体的例子，最好的例子是应力张量。不过，在把注意力转移到具体例子以前，我们可以通过习题2.26，2.27，2.28讨论一下张量方程的意义。

2.7 张量方程的意义

在上节末尾习题中所叙述的定理包含了张量场最重要的特性：如果一个张量场的所有分量，在一个坐标系中为零，那么它们在按照允许变换所能得到的所有坐标系中，同样也为零。由于已知类型张量场的和与差是同样类型的张量，我们推得，如果某个张量方程在一个坐标系中能够成立，那么，对于用允许变换所能得到的所有坐标系，它也一定成立。

于是，张量分析的重要性可以综述如下：只有在方程中的每一项都有相同的张量特征时，这个方程的形式对任意参考标架才普遍有效。如果这个条件不满足，简单地改变参考系就会破坏关系的形式，那么，该形式的关系式只能是偶然的。

我们看到，在列出任何一个物理关系时，张量分析和因次分析同样重要。在因次分析中，我们用特殊选择的基本单位研究一个物理量所发生的变化。除非两个物理量有相同的因次，否则它们不能

相等。描述物理关系的方程，除非它们不随基本单位的改变而改变，否则它就不可能是正确的。

由于张量变换定律的构思，张量方程是与物理过程相协调的。

2.8 向量和张量的符号用黑体字还是用指标

在连续介质力学中，我们关心的是用向量描述位移，速度，力等等，用张量描述应力，应变，本构方程等。对向量来说，通常用黑体字符号或一个符号上加箭头，例如，$\mathbf{u}$ 或$\vec{u}$适用所有的情况；但对张量来讲，意见则不一致。一个二阶张量可以印成黑体字或带一双箭头，或带一对大括号。于是，如果 $\boldsymbol{T}$ 是 2 阶张量，它可以印成 $\boldsymbol{T}$，$\vec{T}$或者$\{T\}$。第一种符号最简单，但是，必须记住这个符号代表什么；它可以是一个向量，或者也可以是一个张量。其他的符号很麻烦。当几个向量和张量组合在一起时，简单符号就会暴露出比较严重的缺点。在向量分析中，我们必须区别数量积和向量积。关于张量又该如何办？我们要定义很多类的张量积吗？因为有各种各样的方法可以把张量组合起来，所以我们必须定义很多类的张量积。这样，事情就变得复杂了。为此，在大多数要求广泛利用张量的理论工作中，就采用指标符号，在这种符号中，向量和张量对参考标架分解成它们的分量，用像 u_i，u_{ij}等这样的符号来表示。这些分量是实数。这些分量的数学运算遵循通常的算术规则。无需引入特殊的组合规则。这样，就获得一种简单的办法。另外，指标符号清楚地展示出张量的阶和排列。它明显地显示出参考标架的作用。

不过，上面最后一个提到的指标符号的优点，也是一个缺点：它把读者的注意力从物理实体引开。然而，必需采用并且熟悉两种体系。

2.9 商法则

考察一组 n^3 个函数 $A(1,1,1)$，$A(1,1,2)$，$A(1,2,3)$等，或者

简写为 $A(i,j,k)$，每一个指标 i,j,k 的范围是 $1,2,\cdots,n$。虽然函数集 $A(i,j,k)$ 有合适的分量数目，我们并不知道它是否为张量。现在，我们假设知道一些关于 $A(i,j,k)$ 与任意一个张量乘积的性质。那么就有一个方法，使我们能够确定 $A(i,j,k)$ 是否为张量，而避免了直接确定变换规律的麻烦。

例如，令 $\xi_i(x)$ 是一向量，设已知乘积 $A(i,j,k)\xi_i$（对 i 按求和约定求和）产生 $A_{jk}(x)$ 类型的张量，即

$$A(i,j,k)\xi_i = A_{jk}. \tag{2.9-1}$$

那么，我们可以证明，$A(i,j,k)$ 是 $A_{ijk}(x)$ 类型的张量。

证明很简单，因为 $A(i,j,k)$ 是属于 A_{jk} 类型的张量，所以把它变换到 $\overline{x}$ 坐标中，如

$$\overline{A}(i,j,k)\overline{\xi}_i = \overline{A}_{jk} = \beta_{jr}\beta_{ks}A_{rs} = \beta_{jr}\beta_{ks}[A(m,r,s)\xi_m]. \tag{2.9-2}$$

但是，$\xi_m = \beta_{im}\overline{\xi}_i$。将它代入上面方程的右边，并把所有项移到方程的一边，即得

$$[\overline{A}(i,j,k) - \beta_{jr}\beta_{ks}\beta_{im}A(m,r,s)]\overline{\xi}_i = 0. \tag{2.9-3}$$

现在，$\overline{\xi}_i$ 是一个任意向量。因此，括号内的量必为零，有

$$\overline{A}(i,j,k) = \beta_{im}\beta_{jr}\beta_{ks}A(m,r,s), \tag{2.9-4}$$

它正是 A_{ijk} 类型张量的变换规律。

上面例子的模式可以推广到更高阶的张量。

2.10 偏导数

当仅考察笛卡儿坐标时，任何张量场的偏导数具有笛卡儿张量分量的性质。为了证明这一点，让我们考察两组笛卡儿坐标 (x_1, x_2, x_3) 和 $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$，它们用下式联系

$$\overline{x}_i = \beta_{ij}x_j + \alpha_i, \tag{2.10-1}$$

式中 β_{ij} 和 α_i 都是常数。

现在，如果 $\xi_i(x_1, x_2, x_3)$ 是一个张量，那么

$$\bar{\xi}_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3) = \xi_k(x_1,x_2,x_3)\beta_{ik}, \qquad (2.10\text{-}2)$$

然后,对方程两边微分后,即得

$$\frac{\partial\bar{\xi}_i}{\partial\bar{x}_j} = \beta_{ik}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial\bar{x}_j} = \beta_{ik}\beta_{jm}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_m} \qquad (2.10\text{-}3)$$

这就证实了上面的叙述。

实际中常采用逗号表示偏导数。于是

$$\xi_{i,j} \equiv \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}, \quad \phi_{,i} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \quad \sigma_{ij,k} \equiv \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_k}.$$

习　题　2

2.1　已知向量 $\boldsymbol{u}=-3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$,试求 $\boldsymbol{u}$ 方向的单位向量。

答案:$(\sqrt{2}/10)\boldsymbol{u}$.

2.2　若$\overrightarrow{AB}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,且线段$\overline{AB}$的中点坐标为$(-4,2)$,试求 A 和 B 的坐标。

答案:$\left(-3,\frac{1}{2}\right)$,$\left(-5,\frac{7}{2}\right)$。

2.3　试证,对任意两个向量 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,有

$$|u-v|^2+|u+v|^2=2(|u|^2+|v|^2).$$

2.4　试求三个大小均为 10 磅的共面力的合力的大小和方向。每一个力都在物体上原点处向外作用,并分别与 x 轴成 60°,120°和 270°角。

答案:$10(\sqrt{3},-1)$,$\perp x$。

2.5　试求 $\boldsymbol{u}=6\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3$ 间的夹角。

答案:$\cos^{-1}\left(-\frac{2}{63}\right)$.

2.6　已知 $u=3e_1+4e_2-e_3$,$v=2e_1+5e_3$,试求 α 值使得 $\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 正交。

答案:$-\frac{1}{29}$。

2.7　已知 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,试计算 $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$和$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$.

答案:16

2.8　$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ 称为 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$. 的数量三乘积。证明$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$:

2.9　试求经过 $A(1,0,2)$,$B(0,1,-1)$和 $c(2,2,3)$的平面方程。

答案：$7x-2y-3z-1=0$.

2.10 试求习题2.9中 ΔABC 的面积。

答案：$\sqrt{62}/2$。

2.11 试求与两个向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{k}$. 相垂直的向量。

答案：$7\boldsymbol{e}_1-7\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3$.

2.12 用向量方程的形式表示初等物理中的基本定律，即牛顿运动定律，在电荷间的吸、斥力的库仑定律，关于电磁场的马克斯威尔方程等。

例如，以向量形式表示牛顿万有引力定律，令 m_1, m_2 是两个质点的质量。令质点1到质点2的位置向量为 $\boldsymbol{r}_{12}$。因此，由于质点1与质点2间的万有引力在质点1所产生的力是

$$\boldsymbol{F}_{12}=G\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}_{12}|^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{|\boldsymbol{r}_{12}|}$$

式中 G 是引力常数。

2.13 考察一个在圆轨道上以等速度运动的质点。令 $\boldsymbol{v}$ 是任何瞬间的速度。试求该质点的加速度，即求向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$?

答案：极坐标中的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 可以表示如下。令 $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{z}}$，分别是原点在 P 而方向沿径向，切向，和垂直于轨道平面的极轴方向的单位向量。(参见图 $P2.13$) 那么，$\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{\theta}}$，其中 v 是 $\boldsymbol{v}$ 的绝对值。因此，取微分

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

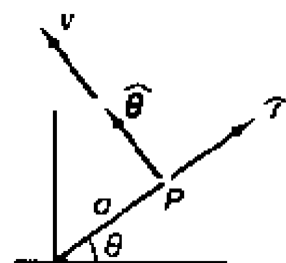


图 $P2.13$ 在一个圆轨道上运动的质点的速度向量

因为 v 是常数，最后一项是零。求值 $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}/\mathrm{d}t$ 时，我们注意到 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是一个单位向量；因此，它仅能改变方向。$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}/\mathrm{d}t$ 垂直于向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，即平行于 $\hat{\boldsymbol{r}}$。令 ω 是质点绕轨道中心的角速度。显然，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是以速率 $\omega=v/a$ 转动。因此，

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}/\mathrm{d}t=-(v/a)\hat{\boldsymbol{r}}, \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=-(v^2/a)\hat{\boldsymbol{r}}.$$

2.14 一个质点沿半径为 a 螺距为 h 的圆螺旋线上以等速度 v 运动，试求质点的加速度，如果质点位于 P 点，如图 $P2.14$ 所示，试用单位向量 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示速度和加速度向量，它们分别是螺旋线在 P 点的切向，法向和副法向单位向量。

答案：速度向量平行于 $\boldsymbol{t}$，大小为 v。因此，$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{t}$。取微分，并注意 v 是一个常数，则有 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=v\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}t$。但因 $\boldsymbol{t}$ 具有不变的单位长度，$\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}t$ 必须

垂直于 $\boldsymbol{t}$，因此必是 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的组合，即是

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = kn + \tau b$$

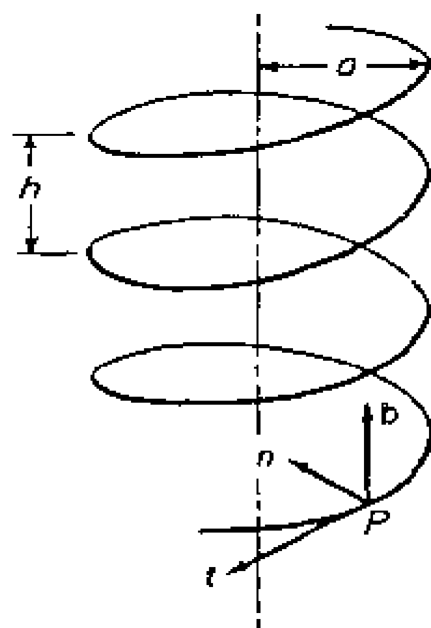


图 $P2.14$　一个螺旋轨道

式中 k 和 τ 是常数。如果质点以单位速度运动，常数 k 和 τ 分别称为空间曲线的曲率和挠率。

用极坐标表示这个问题很方便。令径向，周向和轴向的单位向量分别是 $\hat{r}$，$\hat{\theta}$和 $\hat{z}$，那么

$$v = u\hat{\theta} + w\hat{z}$$

式中 u 和 w 分别是周向和轴向的速度。因此 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)\hat{\theta} + u\mathrm{d}\hat{\theta}/\mathrm{d}t + (\mathrm{d}w/\mathrm{d}t)\hat{z} + w(\mathrm{d}\hat{z}/\mathrm{d}t) = u\mathrm{d}\hat{\theta}/\mathrm{d}t = -(u^2/a)\hat{r}$. 速度 u 和 w 与 v 之间的关系如下：在时间间隔 $\Delta t = 2\pi a/u$ 内，轴向位置 z 变化了 h。因此，$w = h/\Delta t = hu/2\pi a$，和 $v = u[1 + h^2/(4\pi^2 a^2)]^{1/2}$.

2.15　将方程(2.2-1)或(2.2-3)写成带指标的形式。令 $F^{(i)}$的分量写为 $F_k^{(i)}$，$k=1,2,3$；即 $F_x = F_1$ 等。

答案：

$$\sum_{i=1}^{n} F_k^{(i)} = 0.$$

2.16　试证

$(a)\delta_{ii}=3$　　$(b)\delta_{ij}\delta_{ij}=3$

$(c)\epsilon_{ijk}\epsilon_{jki}=6$　　$(d)\epsilon_{ijk}A_jA_k=0$

$(e)\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$　　$(f)\delta_{ij}\epsilon_{ijk}=0$

2.17　将方程(2.1-1)和(2.1-5)写成指标形式，例如

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_iv_i$.

注：对方程(2.1-1)，我们可以如下做：定义三个单位向量 $\boldsymbol{v}^{(1)}=e_1$，$\boldsymbol{v}^{(2)}=e_2$，$\boldsymbol{v}^{(3)}=e_3$，则 $\boldsymbol{u}=u_i\cdot v^{(i)}$.

2.18　使用指标形式的向量方程求解习题 2.5 到习题 2.9。

2.19　两个向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$　$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$的向量积是向量 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$，其分量是

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

试证，这可以简缩写为

$$w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k.$$

2.20 将方程(2.1-7)表示成指标形式。

2.21 试用向量分析方法，导出关于三个任意向量 A，B，C 的向量恒等式：

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C.$$

解：因为 $A\times(B\times C)$是垂直于 $B\times C$，所以它必须位于 B 和 C 的平面内。因此，可以写出 $A\times(B\times C)=aB+bC$，其中 a，b 是数量。但是 $A\times(B\times C)$是 A，B，C 的一个线性函数；所以，a 必定是 A 和 C 的线性数量组合，b 必定是 A 和 B 的线性数量组合。因此，a，b 分别与 A、C 和 A、B 成比例，我们可以写为

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \lambda(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} + \mu(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

式中 λ，μ 是与 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 无关的常数。因此，我们可以用特殊情况来计算 λ，μ 的值，例如，如果 i，j，k 分别是 x，y，z 轴(右手直角笛卡尔坐标轴)方向的单位向量，我们就可让 $B=i$，$C=j$，$A=i$，证得 $\mu=-1$；让 $B=i$，$C=j$，$A=j$，证得 $\lambda=1$。

2.22 试将习题 2.21 中的方程写成指标形式，并依据 ϵ-δ 恒等式(2.3-19)证明它是正确的。

注：因为习题 2.21 中的方程对任意向量 A，B，C 都能成立，所以这个证明可以看作是对当仅限于笛卡儿坐标时，若提供的 ϕ，ξ 和 σ_{ij}是张量的话，则 ϕ_i，ξ_{ij}和 σ_{ijk}就分别是 1，2，3 阶张量。

ϵ-δ 恒等式的一个证明。

解：$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_l=\epsilon_{lmn}a_m(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_n=\epsilon_{lmn}a_m\epsilon_{njk}b_jc_k=\epsilon_{nlm}\epsilon_{njk}a_mb_jc_k$. 由 ϵ-δ 恒等式，方程(2.3-19)，这式变为$(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj})a_mb_jc_k$. 因此，它是 $\delta_{lj}a_mc_mb_j-\delta_{lk}a_mb_mc_k=a_mc_mb_l-a_mb_mc_l=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B})_l-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C})_l$.

2.23 把方程(2.4-10)展开，并解释六个方程的几何意义。$i=1,2,3$。

解：令指标 i 代表 1、2、3。

若 $i=1$，$j=1$：则 $\beta_{11}\beta_{11}+\beta_{12}\beta_{12}+\beta_{13}\beta_{13}=1$. (1)

若 $i=1$，$j=2$：则 $\beta_{11}\beta_{21}+\beta_{12}\beta_{22}+\beta_{13}\beta_{23}=0$. (2)

方程(1)的意义是向量$(\beta_{11},\beta_{12},\beta_{13})$的长度为 1。方程(2)的意义是向量$(\beta_{11},\beta_{12},\beta_{13})$，$(\beta_{21},\beta_{22},\beta_{23})$互相正交。

其他的 i，j 组合类似。

2.24 试用下面的另一种方法推导(2.4-10)方程。将方程(2.4-4)两边对 x'_j

微分。然后应用(2.4-6)和 $\partial x_i/\partial x_j=\delta_{ij}$来简化结果。

解：将方程(2.4-4)对 x'_j 微分，我们得到 $\delta_{ij}=\beta_{ik}\partial x_k/\partial x'_j$。但 $x_i=\beta_{ji}x'_j$。将指标 i 变换成 k，再微分，即得 $\partial x_k/\partial x'_j=\beta_{jk}$。合并这些结果，就得到 $\delta_{ij}=\beta_{ik}\beta_{jk}$。

2.25 (a)复习解线性联立方程的方法。应用行列式是方法之一。应用那个方法去解方程(2.5-4)对 dx_1,dx_2,dx_3 的解。应用方程式(2.3-16)中所定义的置换符号 ϵ_{rst}，表示最后的结果。

(b)R 是在一个平面上在单位半径圆内的一个区域。圆的方程在极坐标中是 $r=1$，在笛卡儿直角坐标中为 $x^2+y^2=1$。雅可比 J 示出等于 r 并且圆的区域是

$$\iint_R J\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

或

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这里是导数 $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 的乘积乘以雅可比在给定区域的一个积分。

2.26 试证，如果在一个坐标系中，笛卡儿张量的所有分量都等于零，那么它们在所有其他笛卡儿坐标系中也都等于零。这一点或许是张量场的最重要的特性。

证明 从方程(2.6-6)可以立刻证明这点。

如果 t_{mn}的每一个分量为零，那么，方程的右边为零，对所有 i，j，$\bar{t}_{ij}=0$。

2.27 证明定理：两个同阶笛卡儿张量的和或差仍是一个同阶的张量。于是，同阶张量的任何线性组合仍是同阶张量。

证明：令 A_{ij}，B_{ij}是两个张量。在坐标变换(2.6-1)下，有新分量

$$\overline{A}_{ij}=A_{mn}\beta_{im}\beta_{jn},\quad \overline{B}_{ij}=B_{mn}\beta_{im}\beta_{jn}.$$

相加或相减，得

$$\overline{A}_{ij}\pm\overline{B}_{ij}=\beta_{im}\beta_{jn}(A_{mn}\pm B_{mn})$$

证明毕。

2.28 证明定理：若 $A_{\alpha_1\cdots\alpha_r}$，$B_{\alpha_1\cdots\alpha_r}$是张量。那么方程

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=B_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

是一个张量方程；即，如果这个方程在一个笛卡儿坐标系中成立，那么，它在所有笛卡儿坐标系中亦成立。

证明：用

$$\beta_{i\alpha_1}\beta_{j\alpha_2}\cdots\beta_{s\alpha_r}$$

乘方程两边，并对重复指标求和，得到方程

$$\overline{A}_{ij\cdots k}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)=\overline{B}_{ij\cdots k}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n).$$

另一方面，把方程写成 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0$。因此，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 的每一个分量为零。然后，应用习题 2.27 和 2.26 的结果。

2.29 在任一张量 $A_{ijk\cdots m}$ 中，令两个指标相等，并对该指标遍历求和，这称为缩并。于是对一张量 A_{ijk}，在 i 和 $j(i,j=1,2,3)$ 上缩并，结果向量为 $A_{iik}=A_{11k}+A_{22k}+A_{33k}$。证明，在一个 n 阶的笛卡儿张量中，缩并任何两个指标，导致一个 $n-2$ 阶的张量。

解　命题中唯一有意义的部分是，缩并的结果是张量。令 $A_{ijk\cdots n}$ 是 n 阶张量。那么 $A_{iik\cdots n}$ 只有 $(n-2)$ 个指标。为了证明它是一个张量，考察定义

$$\overline{A}_{ijk\cdots p}=A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}\beta_{i\alpha_1}\beta_{j\alpha_2}\beta_{k\alpha_3}\cdots\beta_{n\alpha_n}.$$

对 i 和 j 进行缩并，得到

$$\overline{A}_{iik\cdots n}=A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}\beta_{i\alpha_1}\beta_{i\alpha_2}\beta_{k\alpha_3}\cdots\beta_{n\alpha_n}.$$

但是，我们从式(2.4-10)知道

$$\beta_{i\alpha_1}\beta_{i\alpha_2}=\delta_{\alpha_1\alpha_2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{A}_{iik\cdots n}&=A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\beta_{k\alpha_3}\cdots\beta_{n\alpha_n}\\&=A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}\beta_{k\alpha_3}\cdots\beta_{n\alpha_n}.\end{aligned}$$

于是，$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}$ 服从 $(n-2)$ 阶张量的变换规律。

那么，定理便证明了。

2.30 如果 A_{ij} 是 2 阶笛卡儿张量，试证 A_{ii} 是数量。

解：由习题 2.29 知道，A_{ii} 是零阶张量，因此是数量。更直接地，我们有

$$\overline{A}_{ij}=A_{mn}\beta_{im}\beta_{jn}$$

$$\overline{A}_{ii}=A_{mn}\beta_{im}\beta_{in}=\delta_{mn}A_{mn}=A_{mm},$$

它服从数量的定义，方程(2.6-4)

2.31 利用指标符号和求和约定，证明下列关系式(参见下面的符号表)。

(a) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$

(b) $(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{t})\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u})$

(c) curl curl $v=$ grad div $v-\Delta v$

解例：

$$(c)\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{v}=\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\epsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right)$$
$$=\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j\partial x_l}$$
$$=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j\partial x_l}$$
$$=\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$
$$=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v}.$$

2.32 令 $\boldsymbol{r}$ 是场内具有代表性的一个点的向径，r 是 $\boldsymbol{r}$ 的大小。试用下表定义的符号，证明

向量符号	指标符号	张量的阶
$\boldsymbol{v}$(向量)	v_i	1
$\lambda=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$(点积，数量积，或内积)	$\lambda=u_iv_i$	0
$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$(叉积或向量积)	$w_i=\epsilon_{ijk}u_jv_k$	1
$\operatorname{grad}\phi=\nabla\phi$(梯度或数量场)	$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$	1
$\operatorname{grad}\boldsymbol{v}=\nabla\boldsymbol{v}$(向量梯度)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$	2
$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}$(散度)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$	0
$\operatorname{curl}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}$(旋度)	$\epsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$	1
$\nabla^2\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}$(拉普拉斯算子)	$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_i}$	1

(a) $\operatorname{div}(r^n\boldsymbol{r})=(n+3)r^n$

(b) $\operatorname{curl}(r^n\boldsymbol{r})=0$

(c) $\Delta(r^n)=n(n+1)r^{n-2}$

解例：

(a)令 x_i 是 $\boldsymbol{r}$ 的分量，$(i=1,2,3)$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial x_i}{\partial x_i}=3$$

$$r^2=x_ix_i;\quad r\frac{\partial r}{\partial x_i}=x_i;\quad \therefore\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}$$

$$\operatorname{div}(r^n\boldsymbol{r})=\nabla\cdot(r^n\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x_i}(r^nx_i)=r^n\frac{\partial x_i}{\partial x_i}+x_i\frac{\partial r^n}{\partial x_i}$$

$$=3r^n+x_i\left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)=3r^n+nr^{n-2}x_ix_i=(n+3)r^n.$$

2.33 已知一数值矩阵元素 $\alpha_{ij}(i,j=1,2,3)$如下

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

试求，当 $i=1,k=1$ 及 $i=1,k=2$ 时，(a)α_{ii}；(b)$\alpha_{ij}\alpha_{ij}$；(c)$\alpha_{ij}\alpha_{jk}$的值。

答案：6，24，2，3。

2.34 众所周知，刚体旋转是不可交换的。例如，取一本书沿书边缘固定参考标架 x,y,z，首先，将它绕 y 轴旋转 90°；然后，绕 z 轴旋转 90°。我们得到一定的位形。但是按相反的次序旋转，就得到一个不同的结果。

坐标旋转也是不可交换的；即变换矩阵(β_{ij})是不可交换的。现在我们在一种类似上面所指的书的刚体旋转的特殊情况中来论证这一点。首先，绕 y 轴旋转 90°，把 x,y,z 变换到 x',y',z'。然后，绕 z' 轴旋转 90°，把 x',y',z' 变换到 x'',y'',z''。于是。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

试推导从 x,y,z 到 x'',y'',z''的变换矩阵。现在颠倒旋转次序，示出得到了一个不同的结果。

2.35 然而，无穷小旋转是可交换的。为了论证这点，考察绕 y 轴旋转无穷小角 θ，跟着再绕 z 轴旋转另一无穷小角 ψ。试比较这个结果与按相反次序旋转所得的结果。

2.36 试用指标符号，将下面方程组表示成一个单个的方程。

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - v(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \quad \epsilon_{xy} = \frac{1+v}{E}\sigma_{xy}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - v(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \quad \epsilon_{yz} = \frac{1+v}{E}\sigma_{yz}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - v(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad \epsilon_{zx} = \frac{1+v}{E}\sigma_{zx}$$

2.37 试将下面方程写成普通的，非简缩的形式：

$$G\left(u_{i,kk} + \frac{1}{1-2v}u_{k,ki}\right) + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

令$x_1 = x$， $x_2 = y$， $x_3 = z$； $u_1 = u$， $u_2 = v$， $u_3 = w$.

2.38 试证 $\epsilon_{ijk}\sigma_{jk}=0$，式中 ϵ_{ijk}是置换符号，σ_{jk}是对称张量，$\sigma_{jk}=\sigma_{kj}$。

2.39 取一本好的物理书，从开始到结尾，应用指标体系，用张量符号写出物理的全部基本定律。

3 应 力

在第一章中我们介绍了应力的概念。在第二章中我们解释和分析了笛卡儿张量。在这章中，我们将讨论应力张量的性质。

3.1 应力的符号

应力的概念在 1.6 节中已讨论过。考虑一个矩形平行六面体内的连续介质，示于图 3.1 中。令一个直角笛卡儿参考标架的坐标轴 x_1、x_2，x_3 平行于平行六面体的边。令 Δs_1 面为平行六面体的一个面，面上外法线向量点为 x_1 轴的正方向。用 $\overset{1}{T}$ 表示作用在 Δs_1 上的应力向量，它沿坐标轴 x_1，x_2，x_3 方向分别有三个分量 $\overset{1}{T}_1$，$\overset{1}{T}_2$、$\overset{1}{T}_3$。在这种特殊情况下，我们引入一组新的应力分量符号：

$$\overset{1}{T}_1 = \tau_{11}, \overset{1}{T}_2 = \tau_{12}, \overset{1}{T}_3 = \tau_{13}. \tag{3.1-1}$$

类似地，令 Δs_2 的外法线沿 x_2 轴的正方向，作用在 Δs_2 上的应力向量 $\overset{1}{T}_2$，在 x_1，x_2，x_3 方向上有三个分量。这些应力分量将用下面式子表示

$$\overset{2}{T}_1 = \tau_{21}, \overset{2}{T}_2 = \tau_{22}, \overset{2}{T}_3 = \tau_{23}. \tag{3.1-2}$$

对于 Δs_3 具有类似的情况。如果把作用在这三个面上的应力或摩擦力分量排列成方阵形式，则得到·

	应力分量		
	1	2	3
垂直于 x_1 的面	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
垂直于 x_2 的面	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}
垂直于 x_3 的面	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}

(3.1-3)

图解在图 3.1 中。分量 $\tau_{11},\tau_{22},\tau_{33}$ 称为正应力，其余分量 τ_{12},τ_{13} 等称为剪应力。每一个这种分量的因次都是单位面积的力，或 M/LT²。

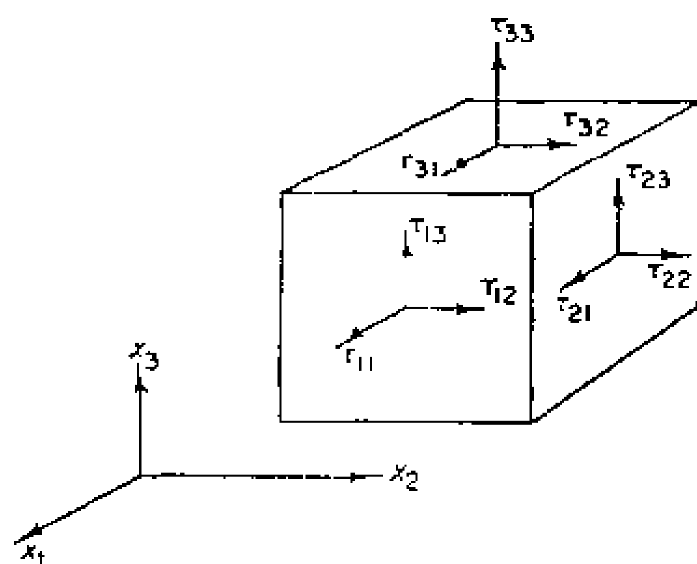


图 3.1 应力分量的符号

在文献中，应力分量的符号是各种各样的。在美国文献中用得最普遍的符号是参照于笛卡儿坐标系 x,y,z 的

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{3.1-4}$$

或

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.1-5}$$

乐甫(Love)[1]用 x_x，y_y 代替 σ_x，τ_{xy}、托德亨特尔(Todhunter)和皮尔松(Pearson⁺)[2]用 $\widehat{xx}$，$\widehat{xy}$。因为读者在文献中可能会碰到所有的这些符号，所以，我们不坚持非要一致不可，无论是哪一种，只要方便，我们就采用它。但是不应该混淆。

值得再一次强调的是，始终要把应力(每单位面积)理解为位于面元素正侧(外法线正方的一侧)的部分，对位于负侧那部分的作用。于是，如果面元素的外法线指向 x_2 轴的正向，并且 τ_{22} 为正，那么代表作用在面元素上的正应力的向量就指向 x_2 轴正方向。但是如果 τ_{22} 是正的，而外法线指向 x_2 轴负方向，则作用在元素上的应力向量也指向 x_2 轴负方向(见图 3.2)。

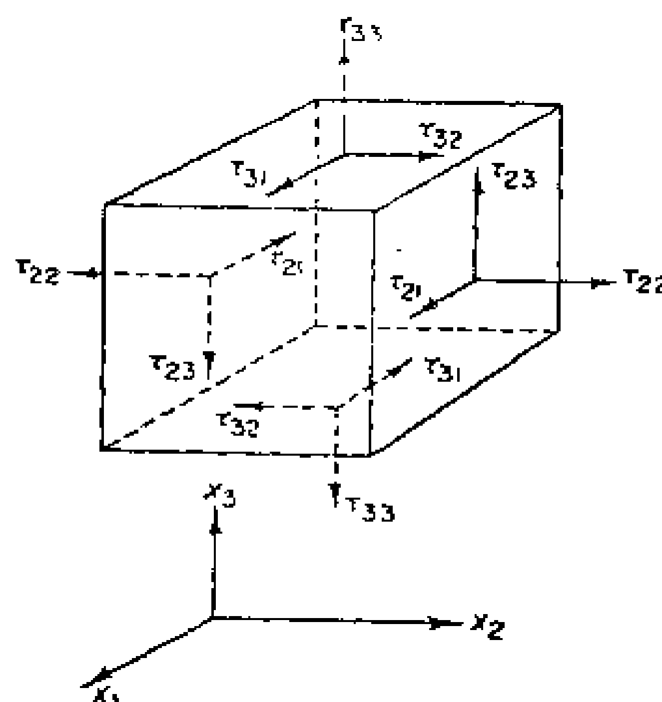


图 3.2　正应力分量的指向

类似地，如果面的外法线的指向与 x_2 轴一致，那么 τ_{21}，τ_{23} 的正值就意味着剪应力向量指向 x_1，x_3 轴正向，如果面的外法线指向与 x_2 轴相反，那么，当 τ_{21}，τ_{23} 为正时应力向量就指向 $x_1 x_3$ 轴的负方向，如图(3.2)所示。仔细地研究这个图是很重要的。当然，这

---

① A. E. H. Love. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: University Press. 1st ed. 1892. 4th ed. 1927.

② Todhunter and K. Pearson. A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials. Cambridge: University Press. Vol. 1, 1886. Vol. 2, 1893.

些规则与常用的拉伸、压缩和剪切概念是一致的。

3.2 运动定律

连续介质力学是建立在牛顿运动定律的基础上的。令坐标系 x_1, x_2, x_3 是一个直角笛卡儿惯性参考标架。用 $B(t)$ 表示物体在任意时刻 t 所占据的空间，参见图 3.3。$\boldsymbol{r}$ 是一个质点相对于坐标系原点的位置向量。现在考虑一个包括 r 点在内的无限小体积单元 dv，ρ 是物质的密度，V 是 r 的速度。那么无限小单元的质量是 ρdv，它的线性动量是 $(\rho dv)\boldsymbol{V}$。在区域 $B(t)$ 上的积分，即

$$\mathscr{P} = \int_{B(t)} V\rho dv \tag{3.2-1}$$

是物体在位形 $B(t)$ 中的线动量。单元的动量绕原点的矩 $r \times V\rho dv$，在域 $B(t)$ 上的积分。

$$\mathscr{H} = \int_{B(t)} \boldsymbol{r} \times V\rho dv \tag{3.2-2}$$

是物体的动量矩。正如欧拉为连续介质所阐述的那样，牛顿定律认为，线动量的变化率等于作用在物体上的总外力 $\mathscr{F}$。

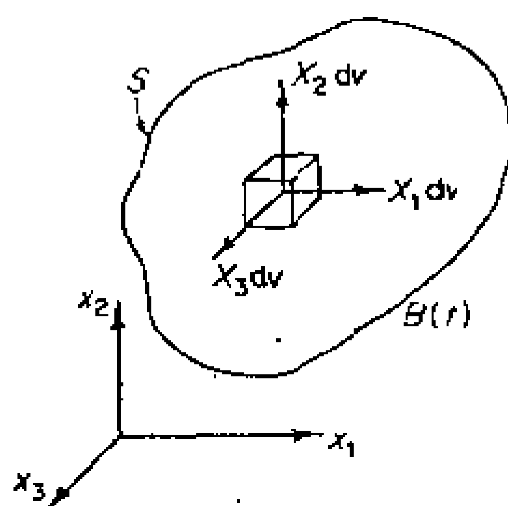


图 3.3 体力

$$\dot{\mathscr{P}} = \mathscr{F}, \tag{3.2-3}$$

并且，动量矩的变化率等于绕原点的总外力矩 $\mathscr{L}$。

$$\dot{\mathscr{H}} = \mathscr{L}. \tag{3.2-4}$$

容易证明，如果方程(3.2-3)成立，那么当方程(3.2-4)对一种选择的原点适合时，它对所有选择的原点都适合①。

---

① 导数 $\dot{\mathscr{P}}$ 和 $\dot{\mathscr{H}}$ 指的是一组固定物质量点的 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{H}$ 对时间的变化率。以后我们将分别用 $D\mathscr{P}/Dt$ 和 $D\mathscr{H}/Dt$ 表示(见 10.3 节)。

如我们在上面曾提到的，在连续介质力学中考察了两类作用在实体上的外力：

(1)作用在物体的体积单元上的体力；

(2)作用在面积单元上的面力，或应力。

体力的例子是重力和电磁力。面力的例子是作用在物体上的气动压力和由于两个物体机械接触，或者两个物体一部分和另一部分接触所产生的应力。

为了确定体力，考察一个以任意曲面 S 为界的体积(图 3.3)。假设由体力构成的合力向量可表示为一个体积分，这个体积分在被 S 包围的域 B 上进行。即

$$\int_B X \mathrm{d}v.$$

具有三个分量 x_1, x_2, x_3 所有的因次都是单位体积的力即 $\mathrm{M(LT)^{-2}}$的向量 $\boldsymbol{X}$ 称为单位体积的力。例如，在重力场中，

$$X_i = \rho g_i,$$

式中 g_i 是重力加速场的分量。ρ 是物质的密度(单位体积的质量)。

作用在物体内部一想像曲面上的面力，就是欧拉和柯西应力原理中所设想的应力向量。按照这个概念，作用在占据闭合曲面 S 内部的域 B 的物质之上的全部力是

$$\mathscr{F} = \oint_S \overset{\nu}{T} \mathrm{d}S + \int_B X \mathrm{d}v, \tag{3.2-5}$$

式中 $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$ 是作用在 $\mathrm{d}S$ 上的应力向量，$\mathrm{d}S$ 的外法线向量是 $\boldsymbol{\nu}$，类似地，绕原点的力矩由下式给出

$$\mathscr{L} = \oint_S \boldsymbol{r} \times \overset{\nu}{T} \mathrm{d}S + \int_B \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{X} \mathrm{d}\nu. \tag{3.2-6}$$

合并这些方程，就得到运动方程

$$\oint_S \overset{\nu}{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}S + \int_B \boldsymbol{X} \mathrm{d}\nu = \frac{D}{Dt}\int_B \boldsymbol{V} \rho \mathrm{d}\nu, \tag{3.2-7}$$

$$\oint_S \boldsymbol{r} \times \overset{\nu}{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}S + \int_B \boldsymbol{r} \times X \mathrm{d}\nu = \frac{D}{Dt}\int_B \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V} \rho \mathrm{d}\nu. \tag{3.2-8}$$

应该指出，对域 $B(t)$ 没有什么要求，只是它在所有时刻必需

由同样的物质点组成。对质点系的选择也没有作特殊的规定，只是要连续，即它们形成连续介质。方程(3.2-7)和(3.2-8)对任何物质的物体均适用。它们可以用于海洋，但是也适用于一匙水。$B(t)$的边界曲面可以与弹性固体的外边界一致，但是也可以只包括其中的一小部分。

3.3 柯西公式

从运动方程出发，我们将首先推导出一个简单的结果，它表明：代表面元素的外部物质对内部物质作用的应力向量$T^{(+)}$，与代表内部物质通过同一面元素对外部物质作用的应力向量$T^{(-)}$大小相等，方向相反

$$T^{(-)} = -T^{(+)}. \tag{3.3-1}$$

为了证明这个公式，考察具有面积为ΔS的两个平行曲面，厚度为δ的一个微元，如图3.4所示。当δ收缩到零，而ΔS仍保持很小但却是有限时，体积力、线动量及其随时间的变化率为零，微元侧边上面力的影响也为零。因此，对于小的ΔS，运动方程(3.2-3)意味着

$$T^{(+)}\Delta S + T^{(-)}\Delta S = 0.$$

因此，得到方程(3.3-1)。

说明这个结果的另一个方法是，应力向量是曲面法向量的函数。当法向量指向反向时，应力向量也反向。

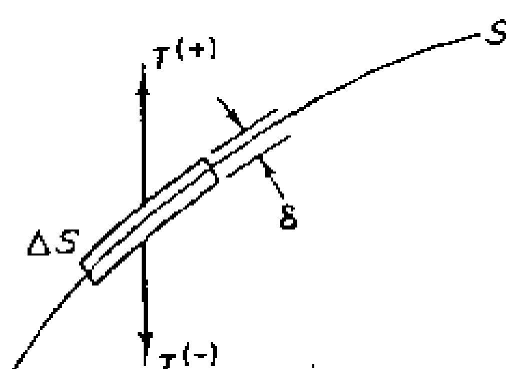


图3.4　穿过曲面S的一个微元的平衡

现在我们来证明，知道了分量τ_{ij}，就立刻可以写出作用在任意曲面上的应力向量，这个曲面的外法线单位向量为ν，其分量为ν_1, ν_2, ν_3。这个应

力向量用 $\overset{\nu}{T}$ 表示，它的分量 $\overset{\nu}{T}_1,\overset{\nu}{T}_2,\overset{\nu}{T}_3$ 由柯西公式给出。

$$\overset{\nu}{T}_i = \nu_j\tau_{ji}. \tag{3.3-2}$$

柯西公式可用几种方法导出，我们将首先给出一种初步的推导。

考察一个由三个平行于坐标平面的面以及一个单位法向量为 ν 的面所形成的无穷小四面体(见图 3.5)。

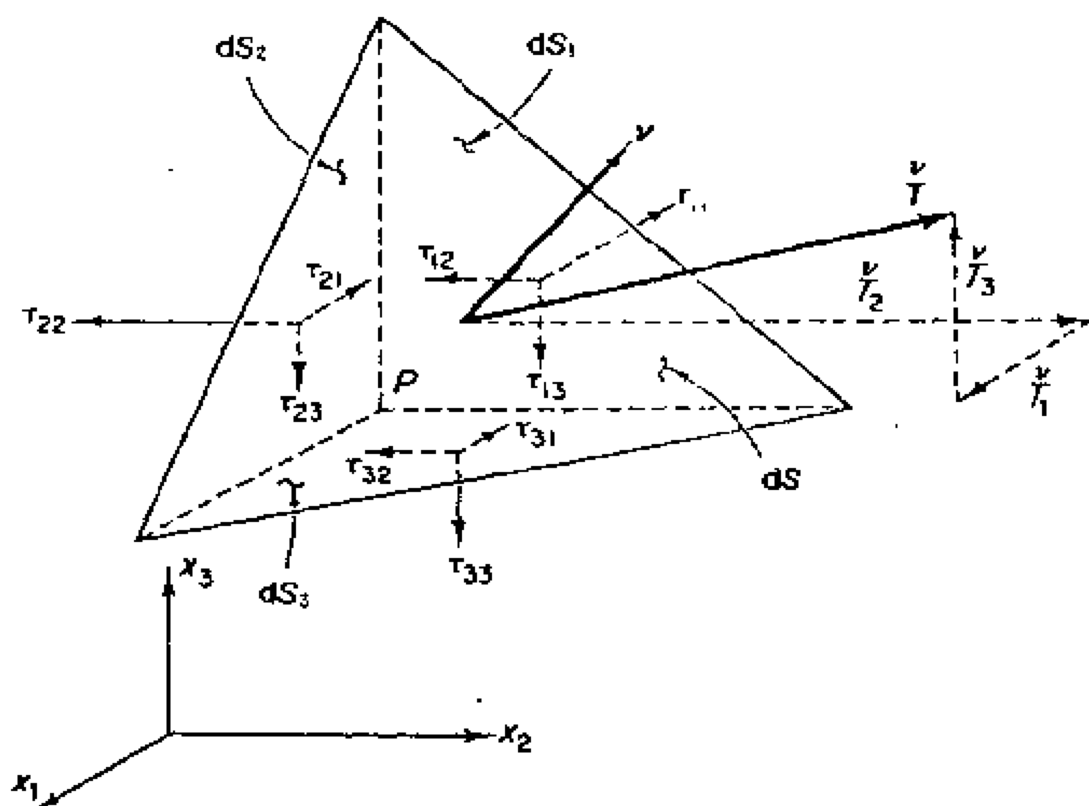


图 3.5 四面体上的表面力

令垂直于 ν 的面的面积为 $\mathrm{d}S$。因此，其他三个面的面积是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_1 &= \mathrm{d}S\cos(\nu,x_1)\\ &= \nu_1\mathrm{d}S = \text{平行于 } x_2x_3 \text{ 平面的面的面积}\\ \mathrm{d}S_2 &= \nu_2\mathrm{d}S = \text{平行于 } x_3x_1 \text{ 平面的面的面积}\\ \mathrm{d}S_3 &= \nu_3\mathrm{d}S = \text{平行于 } x_1x_2 \text{ 平面的面的面积}\end{aligned}$$

四面体的体积是

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{3}h\mathrm{d}S$$

其中 h 是基底 $\mathrm{d}S$ 到顶点 P 的高度。作用在三个坐标面上，沿 x_1

正方向的力，可以写为

$$(-\tau_{11}+\varepsilon_1)\mathrm{d}S_1,(-\tau_{21}+\varepsilon_2)\mathrm{d}S_2,(-\tau_{31}+\varepsilon_3)\mathrm{d}S_3,$$

其中 $\tau_{11},\tau_{21},\tau_{31}$ 是 $\mathrm{d}S$ 对面的顶点 P 上的应力。引入负号是由于三个面的外法线与坐标轴的方向相反，引入 ε_i 的诸项是因为面力作用点与 P 点稍微不同。如果假设应力场是连续的，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是无穷小量。另一方面，作用在法线为 γ 的三角形上的力，在 x_1 轴正方向的分量为 $(\overset{\nu}{T}_1+\epsilon)\mathrm{d}S$，体力在 x_1 方向的分量等于 $(X_1+\epsilon')\mathrm{d}\nu$，线动量变化率有分量 $\rho\dot{V}_1\mathrm{d}\nu$。式中 $\dot{V}_1$ 是 x_1 方向上加速度分量。这里，$\overset{\nu}{T}_1$ 和 X_1 参考于 P 点，ϵ 和 ϵ' 仍是无穷小。于是第一个运动方程是

$$\begin{aligned}(\tau_{11}+\varepsilon_1)\nu_1\mathrm{d}S+(-\tau_{21}+\varepsilon_2)\nu_2\mathrm{d}S\\+(-\tau_{31}+\varepsilon_3)\nu_3\mathrm{d}S+(\overset{\nu}{T}_1+\epsilon)\mathrm{d}S+(X_1+\epsilon')\frac{1}{3}h\mathrm{d}S\\=\rho\dot{V}_1\frac{1}{3}h\mathrm{d}S.\end{aligned}\tag{3.3-3}$$

用 $\mathrm{d}S$ 除整个式子，取极限 $h\to0$，并注意到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\epsilon,\epsilon'$ 随 h 和 $\mathrm{d}S$ 亦趋于零，即得到

$$\overset{\nu}{T}_1=\tau_{11}\nu_1+\tau_{21}\nu_2+\tau_{31}\nu_3,\tag{3.3-4}$$

它是方程(3.3-2)的第一个分量。类似地可得到其它分量。

柯西公式使我们确信，九个应力分量 τ_{ij} 是确定穿过物体内任意曲面元素的面力的必要与充分条件。因此，物体内的应力状态完全可以用 τ_{ij} 这组量来表征。因为 $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}_i$ 是一个向量，并且方程(3.3-2)对任意向量 ν_j 都适合，由此可见，τ_{ij} 是一个张量。因此，τ_{ij} 称为应力张量。

审核可接受的误差

在 1.5 节中，我们定义了可控制变动性和局限于一个低的跳动尺寸的基础上的连续介质。在 1.6 节中应用了定义的应力概念。在 1.7 节中，我们采用了真实材料理想化方法的一种抽象复制。在柯西公式方程(3.3-4)的推证中，我们用了抽象复制并且遵循通常

的计算方法，丢掉方程(3.3-3)中的数字项，得到方程(3.3-4)。我们要求项目的总和

$$\varepsilon_1\nu_1 + \varepsilon_2\nu_2 + \varepsilon_3\nu_3 + \epsilon + \frac{1}{3}h(\epsilon' - \rho\dot{V}_1) \qquad (3.3\text{-}5)$$

和那些保留的项比较是小的；即

$$\overset{\nabla}{T}_1, \tau_{11}\nu_1, \tau_{21}\nu_2, \tau_{31}\nu_3, \qquad (3.3\text{-}6)$$

是当我们在方程式(3.3-3)中取极限 $h\to 0$ 和 $\Delta S\to 0$ 时的情况。现在，如果我们不允许取极限 $h\to 0$ 和 $\Delta S\to 0$，而是代之以限制 h 不小于一常数 h^* 和 ΔS 不小于一个常数乘以 $(h^*)^2$，那么式(3.3-5)列入的量，对于 $h=h^*$ 和 $\Delta S=$ 常数 $\cdot (h^*)^2$ 和(3.3-6)式中的量比较必然是等价的。什么样的一个标准小量可以忽略必须定义，比较对照也是在那个定义下取得的。如果找到(3.3-5)中的量与(3.3-6)中比较可以忽略，那么，我们可以说方程(3.3-3)或(3.3-2)是有效的。原则上，将连续介质理论应用于真实世界的物体，这个冗长的步骤将结束。

3.4 平衡方程式

现在我们把运动方程(3.2-7)和(3.2-8)变换成微分方程。借助于第十章所示的高斯定理和柯西公式可以很简练地做到这一点。但是，在这里我将按照初等教程的特点，以保证物理概念的清晰。

考察一个其面平行于坐标平面的无穷小平行六面体的静力平衡。作用在各个面上的应力表示在图 3.6 上。力 $\tau_{11}dx_2dx_3$ 作用在左面，力 $[\tau_{11}+(\partial\tau_{11}/\partial x_1)dx_1]dx_2dx_3$ 作用在右面。这些表达式都是建立在应力连续性假设的基础之上的。体力是 $X_i dx_1dx_2dx_3$。

图 3.6 中表示的应力可以解释如下，我们考虑的是一个非均匀应力场，每一个应力分量都是位置的函数。于是，应力分量 τ_{11} 是 x_1, x_2, x_3 的函数：$\tau_{11}(x_1, x_2, x_3)$。在点 (x_1, x_2, x_3) 稍微右面的一点处，即在 (x_1+dx_1, x_2, x_3) 处应力 τ_{11} 的值是 $\tau_{11}(x_1+dx_1, x_2, x_3)$。但

是，如果 τ_{11} 是 x_1, x_2, x_3 的连续可微函数，则按照带余项的泰勒定理有

$$\tau_{11}(x_1+\mathrm{d}x_1, x_2, x_3) = \tau_{11}(x_1, x_2, x_3) + \mathrm{d}x_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)$$

$$+ \mathrm{d}x_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x_1^2}(x_1 + \alpha \mathrm{d}x_1, x_2, x_3)$$

式中 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。如果 $\partial^2 \tau_{11} / \partial x_1^2$ 是有限的，那么，只要 $\mathrm{d}x_1$ 选择得充分小，就可以使得最后一项与其他项相比是任意小。对于这样的选择，有

$$\tau_{11}(x_1+\mathrm{d}x_1, x_2, x_3) = \tau_{11}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_1.$$

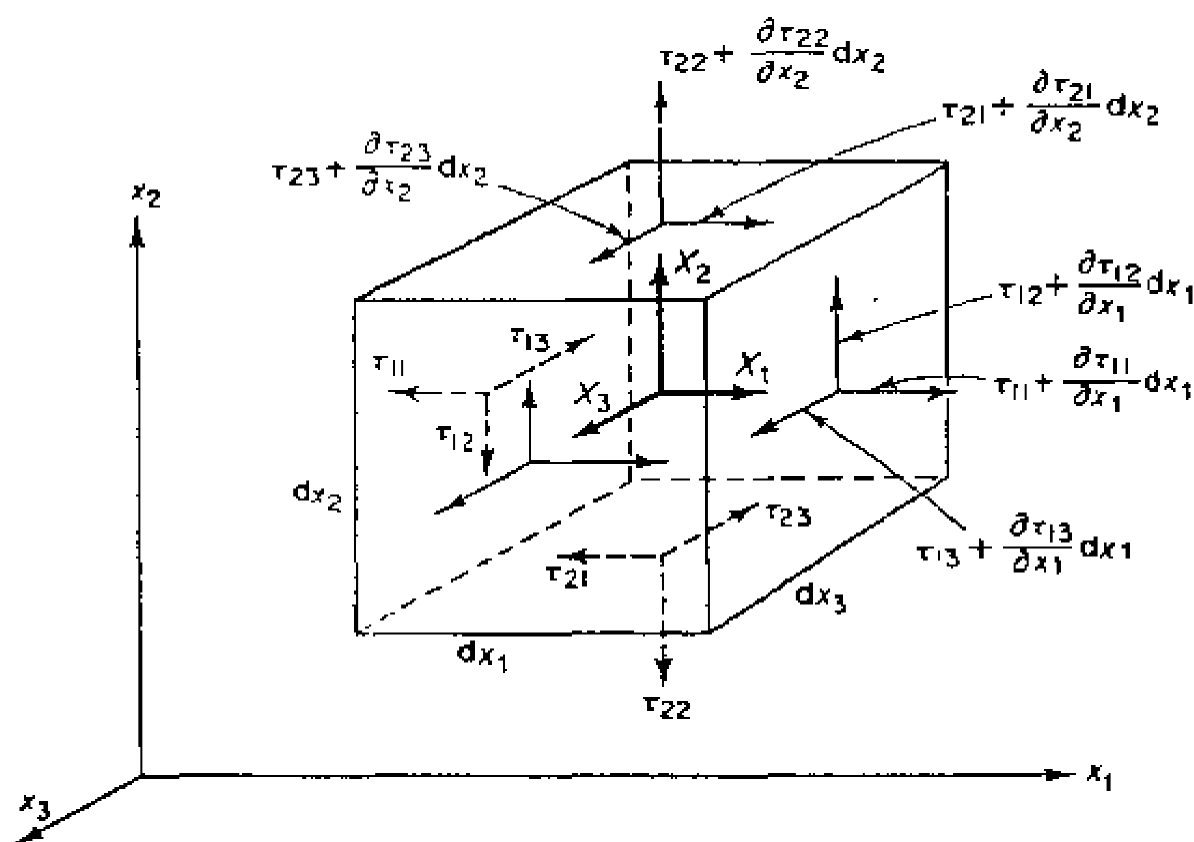


图 3.6　无穷小平行六面体上的平衡的应力分量

在图 3.6 中的应力作用面上，我们简写为 τ_{11} 为 $\tau_{11} + (\partial \tau_{11}/\partial x_1)\mathrm{d}x_1$。左面，底面，后面是位于 x_1, x_2, x_3 处，元素的边长为 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$。

所有应力和它们的导数都在(x_1, x_2, x_3)处计算。物体的平衡

要求合力为零。考察 x_1 方向的力，如图 3.7 所示，我们有 6 个面力分量和一个体力分量。其和是

$$\left(\tau_{11}+\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3-\tau_{11}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3+\left(\tau_{21}+\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1$$
$$-\tau_{21}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1+\left(\tau_{31}+\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$
$$-\tau_{31}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+X_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=0. \qquad (3.4\text{-}1)$$

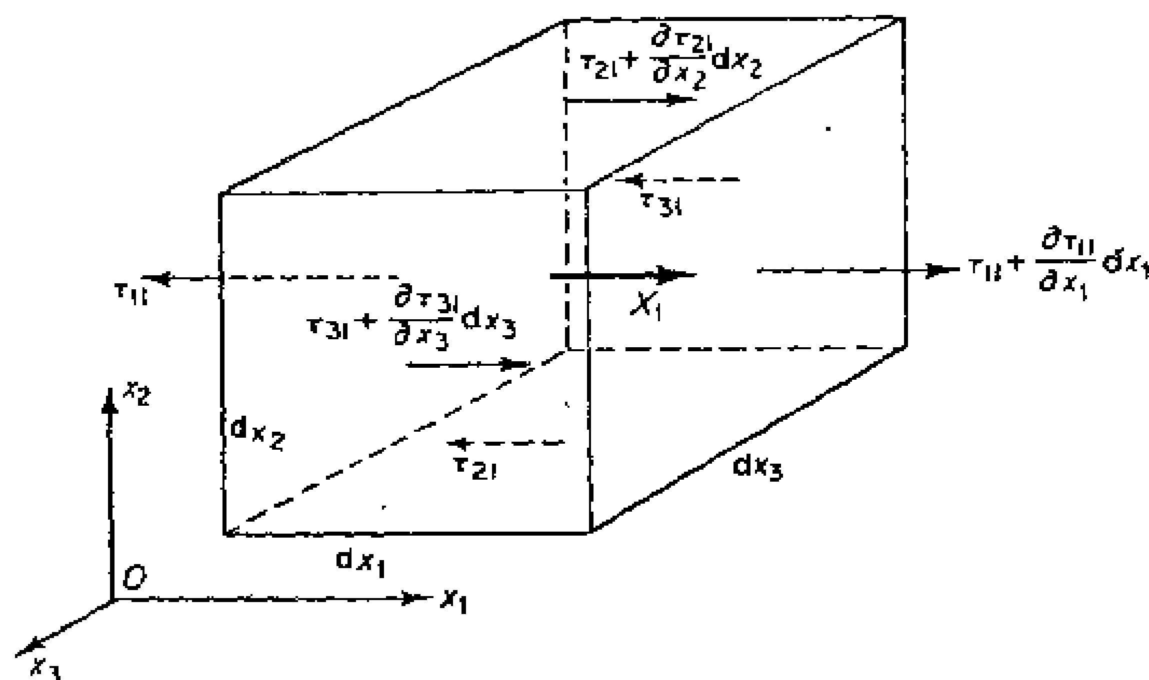


图 3.7 x_1 方向的面力分量

除以 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$，得

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}+X_1=0. \qquad (3.4\text{-}2)$$

用循环置换符号可推得 x_2，x_3 方向的类似的平衡方程。整个方程组可简要地写为

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+X_i=0 \qquad (3.4\text{-}3)$$

这是一个重要的结果，在后面 10.6 节将给出一个更简短的推导。

一个元素的平衡也要求合力矩为零。如果不存在与体积成比例的外力矩，考察力矩将导致重要的结论：应力张量是对称的，即

$$\tau_{ij}=\tau_{ji}. \qquad (3.4\text{-}4)$$

这点可论证如下：参照图 3.7 并考察所有绕 x_3 轴的力矩，我们看到那些平行于 Ox_3 轴，或位于包含 Ox_3 在内的平面内的力的分量不产生任何力矩。产生绕 x_3 轴的力矩的分量表示在图 3.8 中。因此，适当注意到力臂，我们有

$$
\begin{aligned}
&-\left(\tau_{11}+\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\frac{\mathrm{d}x_2}{2}+\tau_{11}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\frac{\mathrm{d}x_2}{2}\\
&+\left(\tau_{12}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1-\left(\tau_{21}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\\
&+\left(\tau_{22}+\frac{\partial\tau_{22}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\frac{\mathrm{d}x_1}{2}-\tau_{22}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\frac{\mathrm{d}x_1}{2}\\
&+\left(\tau_{32}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\frac{\mathrm{d}x_1}{2}-\tau_{32}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\frac{\mathrm{d}x_1}{2}\\
&-\left(\tau_{31}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{2}+\tau_{31}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{2}\\
&-X_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\frac{\mathrm{d}x_2}{2}+X_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\frac{\mathrm{d}x_1}{2}=0.
\end{aligned}
$$

用 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ 除整个式子，并通过取极限 $\mathrm{d}x_1\to 0,\mathrm{d}x_2\to 0,\mathrm{d}x_3\to 0$，我们得到

$$\tau_{12}=\tau_{21}. \tag{3.4-5}$$

类似地，考虑绕 Ox_2，Ox_3 轴的合力矩，将导致由方程(3.4-3)给出的一般结果。在后面 10.7 节中将给出更简短的推导。

到目前为止，我们已经考察了平衡条件。如果希望推导出的不是平衡方程，而是运动方程，只需把达朗贝尔原理用于我们的立方体元素。按照达朗贝尔原理，如果把质点的质量与其加速度之积反号当作外力加于该质点上，那么就可以把这个运动中的质点看作像处于平衡的质点一样。这个假想外力就是惯性力。对一个质点系来讲，如果把所有质点上的惯性力的合力加到质点系的质心上，那么，就可以应用达朗贝尔原理了。

对于本节所考察的元素，如果 $\boldsymbol{a}$(具有分量 a_1,a_2,a_3)代表质点参照一个惯性参考标架的加速度向量，那么，由于元素的质量是 $\rho\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$，所以惯性力是 $-\rho a_i\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$。把这一项加到方程

(3.4-1)并用 $dx_1dx_2dx_3$ 除以整个方程，导致运动方程

$$\rho a_1 = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1, \text{等.}, \tag{3.4-6}$$

即

$$\rho a_i = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i. \tag{3.4-7}$$

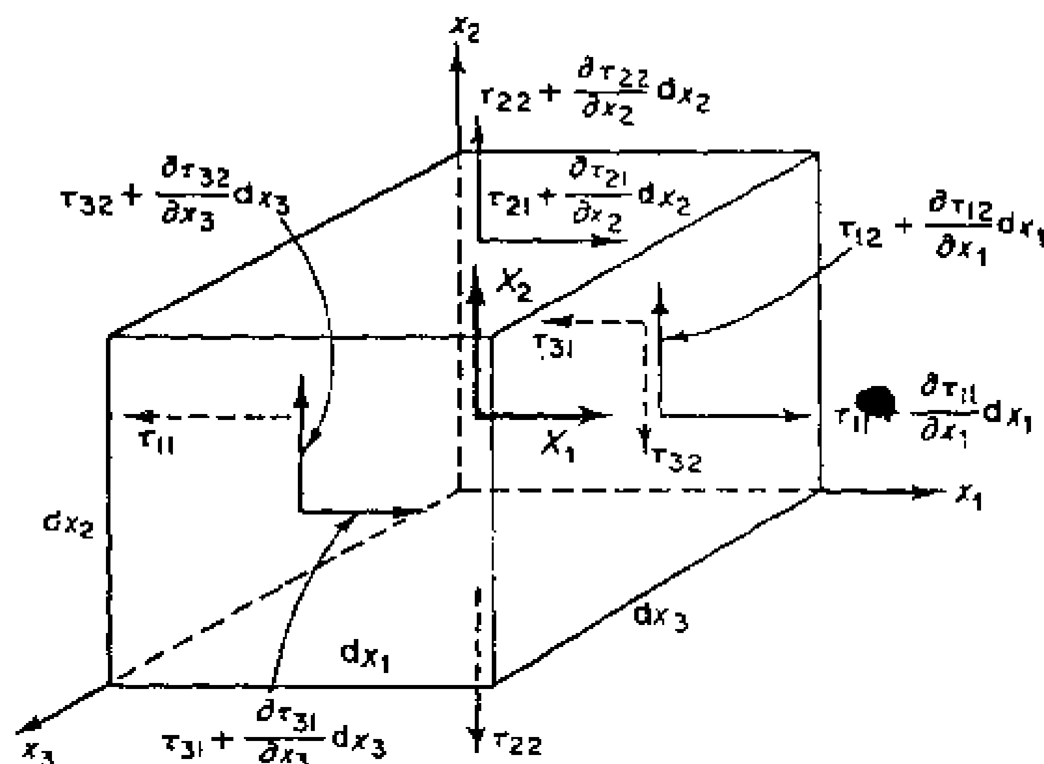


图 3.8 对绕 Ox_3 轴的力矩有贡献的面力分量

3.5 在坐标变换中应力分量的变换

在前一节，应力分量 τ_{ij} 是对于直角笛卡儿坐标系 x_1, x_2, x_3 定义的。现在，取第二组直角笛卡儿坐标系 x'_1, x'_2, x'_3，它们原点相同，但方位不同，并考察新参考系中的应力分量(图 3.9)。令这些坐标用下面线性关系相联系，则有

$$x'_k = \beta_{ki} x_i, \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{3.5-1}$$

式中 β_{ki} 是 x'_k 轴对于 x_i 轴的方向余弦。因为 τ_{ij} 是一个张量(3.3 节)，我们可以立即写出变换规律。然而，为了强调这个结果的重要

性，我们将插入一个基于柯西公式（在 3.3 节中推导的）的基本推导。柯西公式指出，如果 dS 是一个表面元素，其单位外法线向量 ν 具有分量 ν_i，那么作用在 dS 单位面积上的力是一个具有分量为

$$\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji}\nu_j. \qquad (3.5\text{-}2)$$

的向量 $\overset{\nu}{T}$。如果法线 ν 选择得平行于 x'_k 轴，因此，

$$\nu_1 = \beta_{k1}, \quad \nu_2 = \beta_{k2}, \quad \nu_3 = \beta_{k3},$$

那么，应力向量 $\overset{k}{T}'$ 有分量

$$\overset{k}{T}'_i = \tau_{ji}\beta_{kj}.$$

向量 $\overset{k}{T}'$ 在 x'_m 轴方向上的分量用 $\overset{k}{T}'_i$ 和 β_{mi} 的乘积给出。因此，应力分量

$$\begin{aligned}\tau'_{km} &= \overset{k}{T}' \text{ 在 } x'_m \text{ 轴上的投影} \\ &= \overset{k}{T}'_1\beta_{m1} + \overset{k}{T}'_2\beta_{m2} + \overset{k}{T}'_3\beta_{m3} \\ &= \tau_{j1}\beta_{kj}\beta_{m1} + \tau_{j2}\beta_{kj}\beta_{m2} + \tau_{j3}\beta_{kj}\beta_{m3};\end{aligned}$$

即

$$\tau'_{km} = \tau_{ji}\beta_{kj}\beta_{mi}. \qquad (3.5\text{-}3)$$

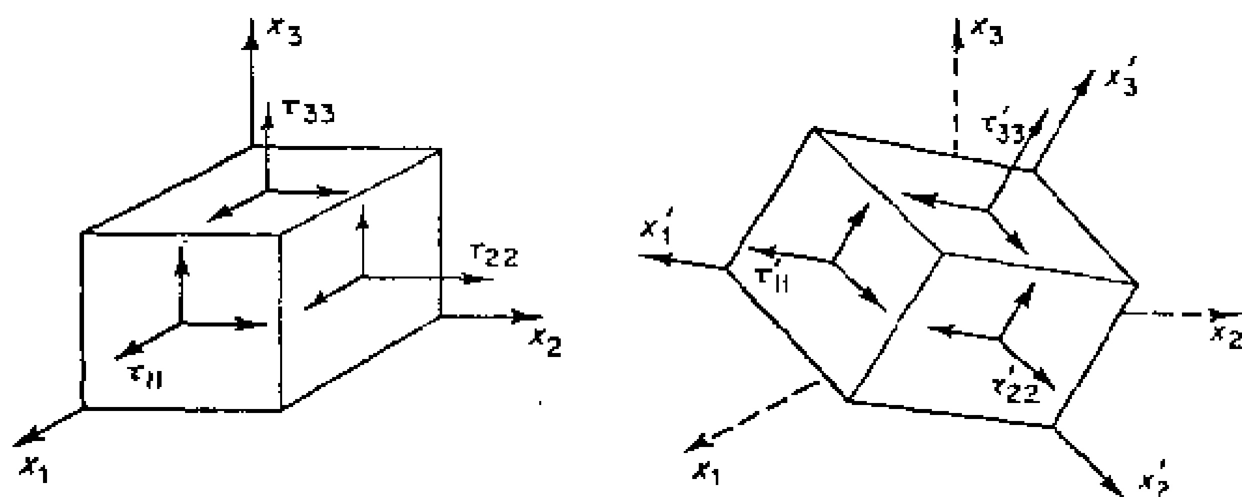


图 3.9　在坐标系旋转时的应力分量的变换

产生的应力　　　　　期望的应力

如果我们将方程（3.5-3）和方程（2.5-6）比较，就可看出，应力分量的变换像 2 阶的笛卡儿张量。于是，用 τ_{ij} 描述的应力的物理

概念与欧几里得空间内 2 阶张量的数学定义相符合。

3.6 正交曲线坐标中的应力分量

如果应用正交曲线坐标这样的参考标架，能够使边界条件简化，在连续介质力学中经常引用它。例如，我们若要研究圆柱形管内的流动，或圆柱的扭转，自然地要采用柱坐标。若要研究球内应力分布，自然地要采用球坐标。事实上，如果我们要研究一个金属薄板爆炸成型为一个球盖的话，那么对板的初始状态采用直角笛卡儿参考标架，对变形状态采用球极参考标架可能是有益的。

在曲线坐标方向内分解应力分量，并用相应的下标来表示它们是合理的。例如，在一组柱坐标 r,θ,z 中，它与直角笛卡儿坐标 x,y,z 的关系如下：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}, \\ r^2 = x^2 + y^2, \\ z = z, \end{cases} \tag{3.6-1}$$

自然地，可以用下式表示点 (r,θ,z) 处的应力张量的分量，

$$\begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{3.6-2}$$

为了将这些应力分量与 σ_x，τ_{xy} 等联系起来，我们在点 (r,θ,z) 处建立一个局部的，直角笛卡儿参考标架 $x'y'z'$，其原点位于点 (r,θ,z)，x' 轴沿 r 增加的方向，y' 轴沿 θ 增加的方向，z' 轴平行于 z（见图 3.10）。因此，用常规符号，可以很好地定义应力 $\tau_{x'x'}$，$\tau_{y'y'}$，…。现在，我们可以令 r,θ,z 与 x',y',z' 等同，来定义列在方程(3.6-2)中的应力分量：

$$\tau_{rr} = \tau_{x'x'}, \tau_{r\theta} = \tau_{x'y'}, \tau_{\theta\theta} = \tau_{y'y'}, \tag{3.6-3}$$

等等。因为坐标系 x',y',z' 与 x,y,z 都是笛卡儿坐标系，我们可以用变换规律(3.5-3)式。x',y',z' 对于 x,y,z 的方向余弦是（见图

2.2 和方程 2.4-3)

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.6\text{-}4)$$

因此,根据方程(3.5-3)和(3.6-3),我们有

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r\cos^2\theta + \sigma_\theta\sin^2\theta - \tau_{r\theta}\sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma_r\sin^2\theta + \sigma_\theta\cos^2\theta + \tau_{r\theta}\sin 2\theta, \\ \sigma_z &= \sigma_z, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta)\sin\theta\cos\theta + \tau_{r\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta), \\ \tau_{zx} &= \tau_{zr}\cos\theta - \tau_{z\theta}\sin\theta, \\ \tau_{zy} &= \tau_{zr}\sin\theta + \tau_{z\theta}\cos\theta. \end{aligned} \qquad (3.6\text{-}5)$$

球坐标或其他正交曲线坐标可按类似方法处理。

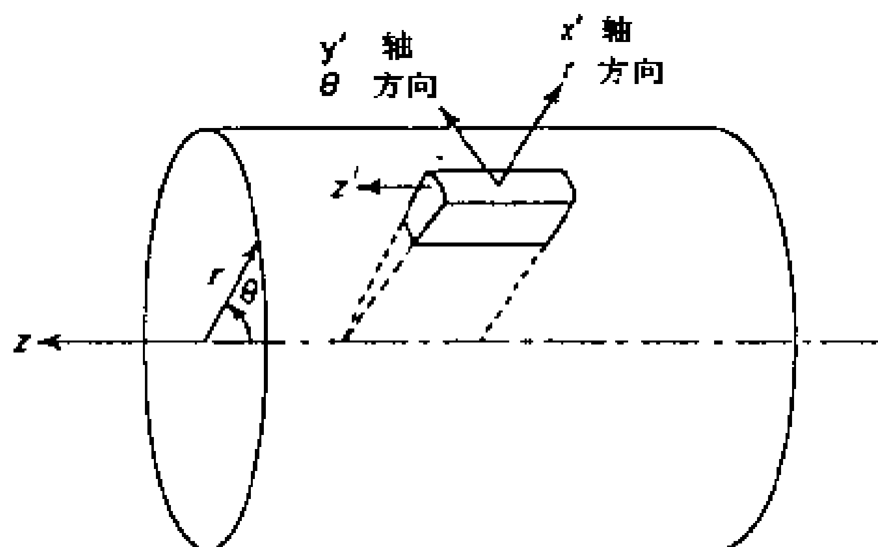


图 3.10 圆柱极坐标中的应力分量

3.7 应力边界条件

力学中的问题通常表现为:知道一些关于固体或流体表面上的力或速度或位移的情况,要求了解物体内部发生什么情况。例如,风吹到建筑物上、它的基础已知是坚固的。试问作用在柱和梁

中的应力是多少？它们安全吗？为了解决这样问题，我们把关于外部世界的已知事实记成边界条件的形式，然后利用微分方程（场方程），把信息扩展到物体内部。如果找到满足所有场方程和边界条件的解，就得到了关于整个物体内部的全部数据。

在物体表面上，或在两个物体之间的界面处，作用在表面上的面力（单位面积的力），在表面的两边必须相等。这的确是定义物体一部分对另一部分相互作用的应力的基本概念。

考察一个由硬材料和软材料结合而成的立方体，如图 3.11 (*a*)所示。使它在两个平面壁之间受到压缩。软材料与硬材料两者都处于受力状态。在界面 AB 上的 P 点情况可以用一系列自由体图来说明，如图 3.11(*b*)所示，对硬材料，在 P 点界面上的正侧，作用面力 $\overset{\nu}{T}{}^{(1)}$。认为 x_1, x_2, x_3 和坐标 x, y, z 一致，单元法向向量 ν 具有三个分量(0,0,1)，面力向量 $\overset{\nu}{T}{}^{(1)}$ 具有三个分量 $\sigma_{ij}^{(1)}\nu_j^{(1)}$，($i=1$、2,3)，这里 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 是在硬材料中的应力张量。对软材料，必定存在一个类似的应力 $\overset{\nu}{T}{}^{(2)}$，其分量为 $\sigma_{ij}^{(2)}\nu_j^{(2)}$，如图 3.11(*c*)。在图 3.11(*d*)自由体图所示，一无穷薄微元的平衡要求

$$\overset{\nu}{T}{}^{(1)} = \overset{\nu}{T}{}^{(2)}. \tag{3.7-1}$$

这是界面两边面力相等的条件，为了更明确，令界面是 xy 平面，令 z 轴垂直于 xy。那么，向量方程(3.7-1)意味着三个方程

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \tag{3.7-2}$$

这些是介质 1 和介质 2 的界面处的应力的边界条件。

注意，这些界面条件没有表明关于应力分量 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$。没有要求这些分量在穿过边界处是连续的。其实，如果材料 1 和 2 的弹性模量不等，而压应变均匀，那么一般来说

$$\sigma_{xx}^{(1)} \neq \sigma_{xx}^{(2)}, \quad \sigma_{yy}^{(1)} \neq \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} \neq \sigma_{xy}^{(2)}. \tag{3.7-3}$$

这些不连续性并不与任何平衡条件相抵触，可以由图 3.11(*e*)看到。

上述情况的一个特例是，介质 2 很软，以至它的应力与介质 1 中的应力相比可以完全忽略（例如，空气和钢）。因此表面称为自由

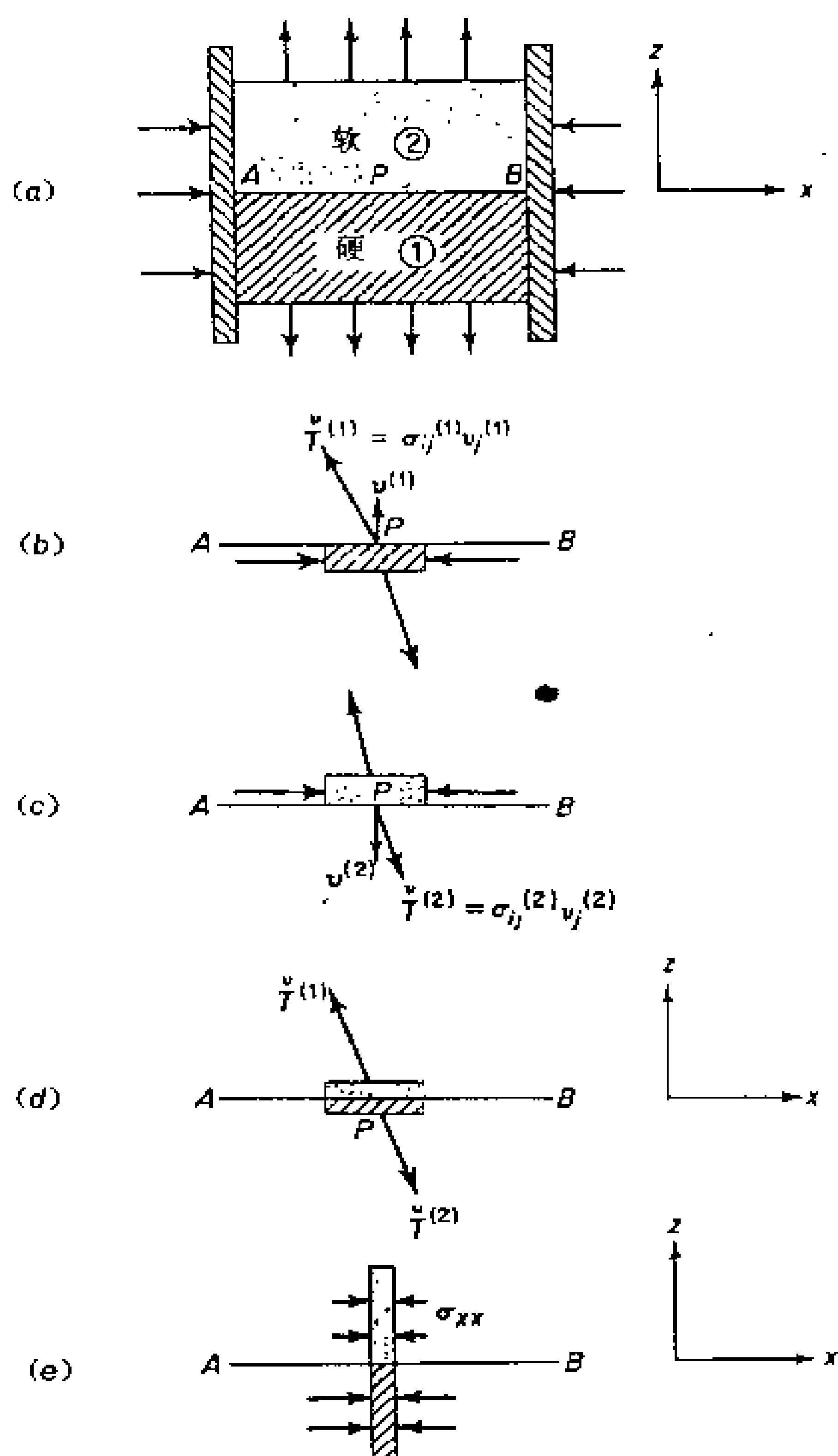


图 3.11　在两个材料界面上应力边界条件的推导

(a)在两个连续介质 1 和 2 之间的界面 AB;(b)在界面 P 点上 No.1 号物质的一个微小单元的自由体图,作用在这个单元 AB 表面上的应力向量 $\overset{\nu}{T}^{(1)}$;(c)No.2 物质 P 上微小单元的自由体图;(d)包含两种介质在内的微小平面单元的自由体图;(e)微小垂直单元的自由体图,示出 σ_{xx} 在界面处可以不连续

表面，边界条件是

$$\sigma_{zz}=0,\quad \sigma_{xz}=0,\quad \sigma_{yz}=0,\tag{3.7-4}$$

另一方面，如果知道介质 2 中的面力，那么，就可以把它认为是作用在介质上的“外载荷”。于是，固体上的应力边界条件通常取形式

$$\sigma_{nn}=p_1,\quad \sigma_{nt_1}=p_2,\quad \sigma_{nt_2}=p_3\tag{3.7-5}$$

其中 p_1,p_2,p_3 是位置和时间的特定函数，n,t_1,t_2 是一组局部的正交轴，n 指向外法线方向。

虽然每一个面都是两个空间之间的界面，但是一般都是将注意力限制在界面的一边，并称另一边为“外部”。例如，结构工程师把作用在建筑物上的风载说成是加于建筑物上的“外载”。相应地，对流体动力学家来说，建筑物只是对空气流的一个刚性的边缘。同一个界面对两种介质却提供了两类不同的边界条件。这种态度分歧的基本理由是：对于要计算作用在结构上气动压力的空气动力学家来说，结构的微小弹性变形是不重要的，而对于要决定建筑物安全性的结构分析家来说，弹性变形却是非常重要的。因此，对空气动力学家来说，建筑物是刚性的，而对弹性力学家则不是。换句话说，两种边界条件都是近似的。

习　题　3

3.1　考察一根长绳子。如果你用一个力 T 拉它。显然在绳子的每一个横剖面上作用有相同的总拉力 T。如果我们考察绳的强度，横剖面愈大，它应愈强，这点从直观上看是清楚的。于是，若有几根绳子，希望比较它们的材料强度，则应该根据应力（在这种情况，它等于拉力 T 除以横剖面）进行比较，而不是根据总拉力。不太希望所有同样材料的绳子在同样的最大应力下破坏。事实上，有趣的是，如果做一个实验，即可发现，由同样材料制成的所有绳子并不是在同样应力下破坏的。你能想像这样一种偶然的事情吗？如果绳子非常细时会感觉怎样？为了具体化，试考察直径 1cm，0.1cm，10^{-2}cm，10^{-4}cm，10^{-6}cm 的尼龙丝。何时你会开始感觉到一些其它的因素可能影响到确定丝的强度？这些因素是什么？

3.2　取一支粉笔，试用（a）弯曲；（b）扭转将它破坏。粉笔在这两种情况下破

坏的型式将是不同的。为什么？我们能判断破坏的型式吗？解离表面？

3.3 柔和的风吹在广阔的水面上，产生了波纹。试描述作用在水面上的应力向量。写出水面的边界条件。

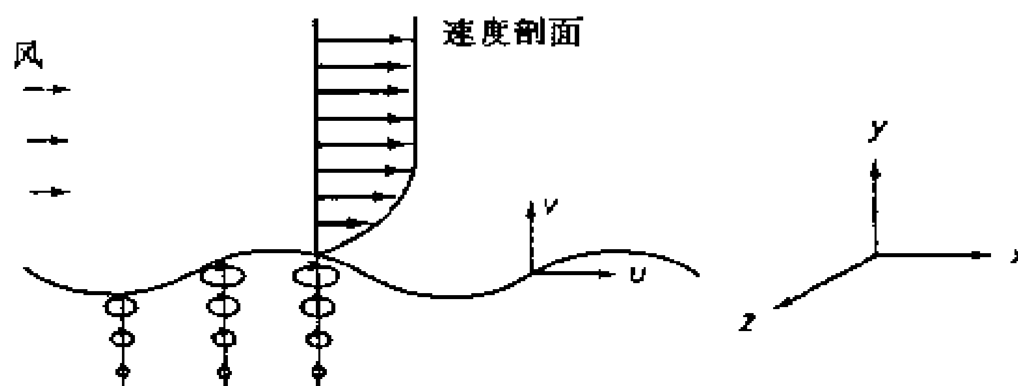


图 $P3.3$ 水气界面处的动力边界条件

3.4 在图 $P3.4$ 中表示水库中的水。我们考察 P 点处的 A-A，B-B 等诸面，画出作用在这些面上的应力向量，考察经过 P 点所有可能的面，所有应力向量的轨迹是什么？

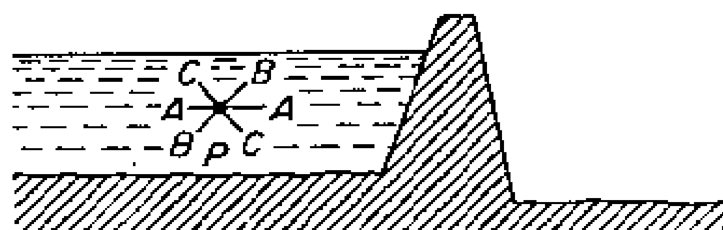


图 $P3.4$ 水库中的水

答案：球。

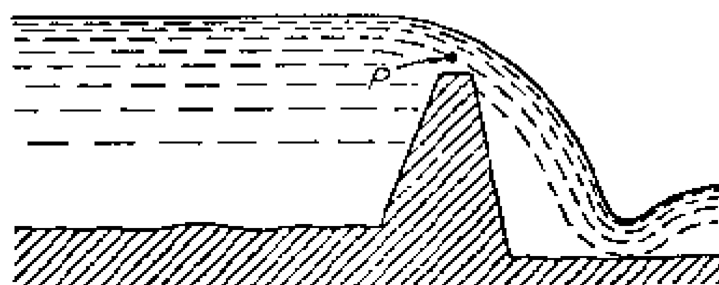


图 $P3.5$ 流过坝的水

3.5 水库中的水流过坝（图 $P3.5$），试考察接近坝顶的一点。譬如说，在坝顶上面 10cm 的一点。再次（如在习题 3.4 中），考察经过这点的所有面，

描述作用在这些面上的应力向量。所有应力向量的轨迹是一个球吗？

现在考察一系列越来越靠近坝顶固体表面的点，譬如说，在距离1cm，10^{-1}cm，10^{-2}cm，10^{-3}cm，10^{-4}cm 的地方。当距离变得非常小的时候，你能预料应力向量的轨迹吗？要特别注意水的粘性。

3.6　标明图 $P3.6$ 中所示的应力

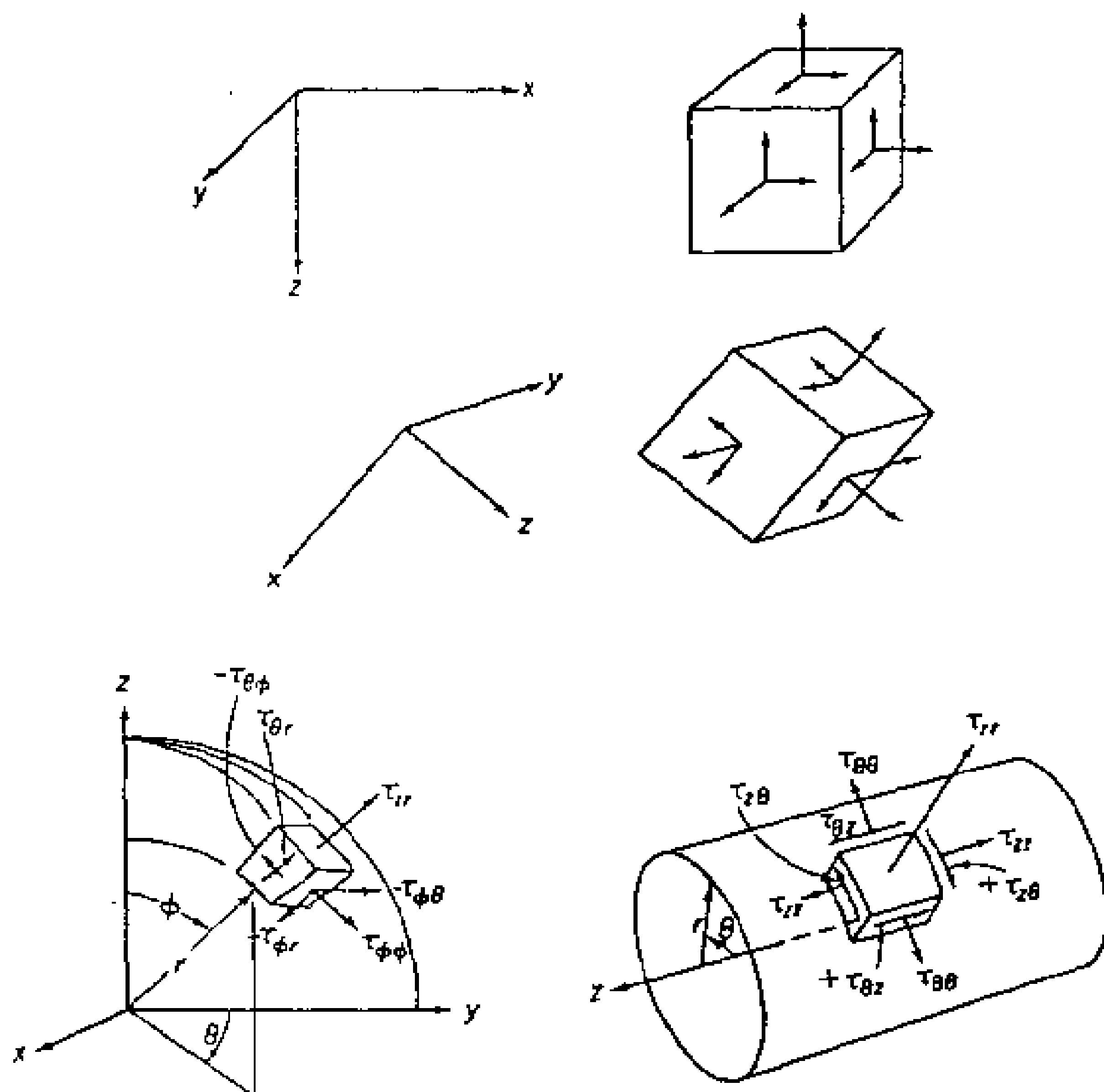


图 $P3.6$　应力

3.7　物体内某处的应力张量的分量可以表示成矩阵

$$\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

试问作用在经过所论平面

$$x + 3y + z = 1$$

外侧(离开原点的一边)上的应力向量是什么?这个平面上应力向量的法向和切向分量是什么?

答案:$\overset{\nu}{T}_i(5,7,3)/\sqrt{11}$;$I^{(n)}=\dfrac{29}{11}$,剪应力=0.771。

解 这个平面具有方向余弦为(1,3,1)/$\sqrt{11}$的法向量。因此

$$\overset{\nu}{T}_1 = \frac{(0.1)+(1.3)+(2.1)}{\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}, \quad \overset{\nu}{T}_2 = \frac{7}{\sqrt{11}}, \quad \overset{\nu}{T}_3 = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

若用 i,j,k 分别表示在 x,y,z 轴方向的单位向量,则有$\overset{\nu}{T}=(5i+7j+3k)/\sqrt{11}$,法向分量等于$\overset{\nu}{T}_i\nu_i=\dfrac{29}{11}$。剪应力(切向分量)可以用以下几种方法求得:

(1)令剪应力$=s$,法向分量$=n$。因此

$$s^2+n^2 = |\overset{\nu}{T}_i|^2 = \frac{25+49+9}{11} = \frac{83}{11}.$$

$$s^2 = \frac{83}{11} - \left(\frac{29}{11}\right)^2,$$

所以

$$s = \frac{6\sqrt{2}}{11}.$$

(2)法向分量向量加上剪切分量向量等于$\overset{\nu}{T}$向量。法向分量位于单位法线$(1i+3j+1k)29/(11/\sqrt{11})$的方向内。令剪切分量向量为 $xi+yj+zk$,则 $29/(11\sqrt{11})+x=5/\sqrt{11}$,意味着 $x \doteq (55-29)/36.5=0.712$。类似地,$y=-0.274$,$z=0.109$,剪应力$=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=0.771$。

3.8 参照 x,y,z 坐标,物体内一点的应力状态由下面矩阵给出

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{pmatrix} \quad \text{kPa}$$

试求通过这点,并平行于平面 $x+2y+2z-6=0$ 的平面上的应力向量。

答案:$\overset{\nu}{T}=533i+133j+33k$。

3.9 在无体力情况,下面的应力分布是否处于平衡状态?

$$\sigma_x = 3x^2+4xy-8y^2, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}x^2-6xy-2y^2,$$

$$\sigma_y = 2x^2 + xy + 3y^2, \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

答案：按照方程(3.4-2)，可知处于平衡状态。

3.10 一点上的应力是 $\sigma_x = 5000\text{kPa}$，$\sigma_y = 5000\text{kPa}$，$\tau_{xy} = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$。试考察经过这点的所有平面。在每一个平面上，作用有一个应力向量，它可以分解成两个分量：一个垂直于平面，一个相切于平面。这些分量分别称为**正应力**和**剪应力**。考察所有方位的平面，试证明：在材料内部该点上，最大剪应力是 2500kPa。

解 令坐标系选择得使所讨论的点位于原点。经过这个点的平面可以用方程

$$lx + my + nz = 0 \tag{1}$$

表示，其中 (l, m, n) 是平面法线的方向余弦。因此，$(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (l, m, n)$，$l^2 + m^2 + n^2 = 1$。允许法向量取所有可能的方向，就得到问题中所指定的所有平面。现在，作用在方程(1)表示的平面上的应力向量是 $(\overset{\nu}{T}_1, \overset{\nu}{T}_2, \overset{\nu}{T}_3) = (5000l, 5000m, 0)$ 面力的法向分量是 $(\overset{\nu}{T}_i)$ 在 (ν_i) 方向的分量，即这两个向量的数量积：正应力 $= 5000(l^2 + m^2)$。因此，(剪应力)$^2 = (\overset{\nu}{T}_i^2) -$(正应力)$^2 = (5000)^2(l^2 + m^2) - (5000)^2(l^2 + m^2)^2 = (5000)^2[l^2 + m^2 - (l^2 + m^2)^2]$。但是，$l^2 + m^2 + n^2 = 1$；所以

$$(\text{剪应力})^2 = (5000)^2[1 - n^2 - (1 - n^2)^2] \tag{2}$$

为了求出小于 1 并使得剪应力变为相对最大的 n 值，令

$$0 = \frac{\partial}{\partial n}(\text{剪应力})^2 = (5000)^2[-2n + 2(1 - n^2)\cdot 2n],$$

解是 $n^2 = \frac{1}{2}$。所以，从方程(2)得到最大剪应力的平方是 $(5000)^2/4$，最后求得最大剪应力为 2500kPa。

3.11 如果在点 (x_0, y_0, z_0) 上的应力状态是

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix} \text{kPa},$$

试求作用在平面 $x - x_0 + y - y_0 + z - z_0 = 0$ 上的应力向量和正应力与剪应力的大小。

答案：$\overset{\nu}{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}(100, 50, -100)\text{kPa}$，$\sigma^{(n)} = 16.7\text{kPa}$，$\tau = 81.7\text{kPa}$。

3.12 对于图 $P3.12$ 中所示的带键的轴，如果受剪键中的应力不能超 70MPa，试决定载荷 P 的最大允许值。

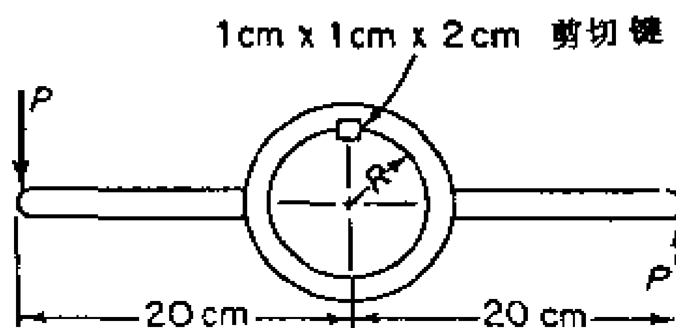


图 $P3.12$ 轴上的键

3.13 试证明，如果 $\sigma_z=\sigma_{zz}=\sigma_{zy}=0$，那么在坐标变换(2.4-3)条件下，有 $\sigma_x+\sigma_y=\sigma'_x+\sigma'_y$；就是说，在平面应力分布中，两个正应力之和是一个不变量。

3.14 两块薄胶合板结合在一起，如图 $P3.14$ 所示，如果胶的允许剪应力是 1.4MPa，承受 40kN 的载荷，试问接合件的最小长度 L 是多少？

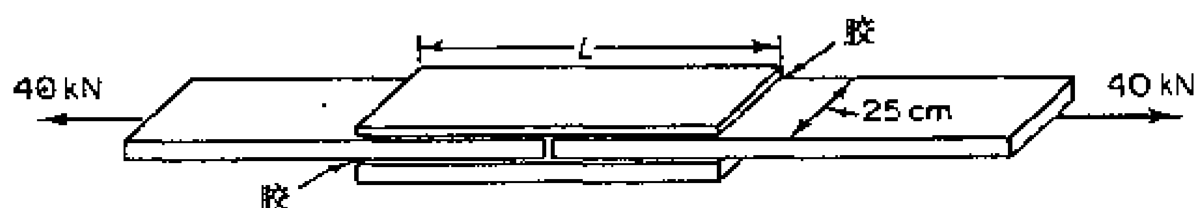


图 $P3.14$ 胶缝

3.15 风力推动机已经安全运行了很长的时间。假设你想应用几何相似设计，按尺寸标出 R_L 的因素和旋转时间的快慢 R_N，但是，不同的材料则不同。由于离心力随 R_L 和 R_N 的不同而变，张应力怎么样？空气动力学力与风速的平方成比例。在动力叶片中弯曲应力随 R_L 和 R_N 的变化怎样？

3.16 具有方向数(±1，±1，±1)的八个平面的集合，称为八面体平面，在每种情况中，选±号中的一个，譬如，(1，1，－1)相应于平面 $x+y-z=0$。令 τ_{ij} 描述应力状态，当 $i\neq j$ 时，$\tau_{ij}=0$。试决定作用在每一个八面体平面上的应力向量和剪应力。

3.17 你是否看见过一个被风吹断的树枝，并观察过它是怎样破坏的吗？它告诉我们哪些有关木材强度的特征？

3.18 做各种材料的破坏实验，这些材料有：通心粉、芹菜、胡萝卜，像钻头、锉刀一类的高碳钢工具，铝条和镁条或硅油灰等。试讨论这些材料的强度特征。

3.19 扭转一圆柱形杆，试描述杆内应力状态。采用图 $P3.6$ 或图 3.10 中所示符号，特别讨论杆的外表自由面上一点的应力分量。

3.20 一个水塔，由支持在圆柱顶部的一个大的雨滴形槽组成，它受到地震，发生摇晃。最大侧向加速度(在垂直于圆柱的方向)估计为 0.2 倍重力加速度，因此，地震引起的最大侧向惯性力等于槽和水重的 20%，作用在水平方向。垂直加速度约为同样大小。试讨论柱内应力状态。

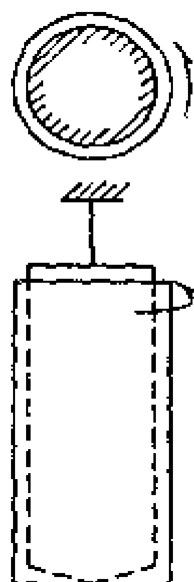


图 $P3.22$ 科埃特流体计

3.21 试讨论在飞行中和着陆时机翼中的应力分布状态。

3.22 科埃特流(Couette Flow)在两个同心圆筒之间的空间充满了流体(图 $P3.22$)，使内圆筒固定不动，而外圆筒以每秒 ω 弧度的角速度旋转。如果在内圆筒上测量到的扭矩是 T，试问作用在外圆筒上的扭矩是多大？为什么？

3.23 在设计连杆时，决定最大剪应力不许超过 20000KPa(因为这个值可能产生屈服)。试问连杆能承受的最大拉力是多少？(连杆的材料是钢)。

答案：40000KPa

3.24 取一个矩形横剖面的薄钢条(如为 0.5cm×1cm×100cm)，利用手册，查出钢的极限强度。令窄条在最长边的方向上承受压缩载荷，仅根据极限强度，试问窄条能够抵抗多大的力？

现在试用你的手压缩这个窄条，窄条在远小于所期望的载荷下发生屈曲。试解释这种弹性屈曲的现象。

3.25 将一张纸板卷成半径约 3cm 或 4cm 的圆筒，这样一个圆管能承受相当大的端部压力。把管子立在桌上，用你的手掌压它，筒子将屈曲破坏，描述屈曲型式。试问屈曲载荷与纸板不发生屈曲时的压缩强度相比是多大？

因为纸板在屈曲后不撕裂，也不伸长，变形后曲面的度量与原始曲面的度量相同，因此，由筒变换到屈曲表面是一个**等度量变换**。

我们知道，在微分几何中如果一个曲面可以等度量地变换为另一个曲面。那么它们的总曲率在相应点必须一样。现在一个曲面的总曲率是主曲率的乘积。对于一张平纸，总曲率为零；所以筒的总曲率为零；超

屈曲表面的总曲率也必须为零。按照这种办法，我们期望，超屈曲表面由具有零总曲率的面积组成，就是说，许多平三角形部分的面积集合成一个钻石型。试将这点与实验结果进行比较。

注　这个题目对于航空和宇航工程有很大的意义。当必须遵循轻重量原则时，薄壁结构就广为采用，这时要用弹性稳定性来设计这些结构。

3.26　从天花板悬下一条绳索。令绳索的密度是 $2g/cm^3$，试求绳索中的应力。

解　令 x 轴选在绳索的方向，所涉及到的唯一的应力是 σ_x，假设 $\tau_{xy}=\tau_{xz}=0$，因此，平衡方程是

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\rho g=0,$$

其中 g 是重力加速度，解是

$$\sigma_x=-\rho gx+\text{常数}.$$

但是，在 $x=L$(绳索长度)处，$\sigma_x=0$。因此，常数是 ρgL。于是，$\sigma_x=\rho g(L-x)$。最大拉应力发生在天花板处，$\sigma_x=\rho gL$。

3.27　考察一个等温大气层的垂直柱，等温大气层服从气体定律 $p/\rho=RT$，或 $\rho=p/RT$，其中 ρ 是气体密度，p 是压力，R 是气体常数，T 是绝对温度。这个气体承受重力加速度 g，因面，体力是每单位体积 ρg。指向地面。如果在地平面 $z=0$ 处，压力是 p_0，试决定压力与地面高度 z 的关系。

答案：$p=p_0\exp[-(g/RT)z]$.

3.28　试讨论为什么习题 3.27 中给出的解，对于地球大气层是不真实的。如果温度 T 是高度 z 的已知函数，解应当是什么？

3.29　考察薄板中的二维应力状态，其中：$\tau_{zz}=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$。不存在体力时，作用在板内的平衡方程是

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0.$$

试证明，如果 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}$ 从一个任意函数 $\Phi(x,y)$ 导出：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

那么平衡方程就恒等地满足。这样一来，平衡方程就可以为无穷多解所满足。

3.30　在一个区间为 $-1\leqslant x,y\leqslant 1$，的矩形平板中，保持下面的应力：

$$\sigma_{xx}=cx+dy,$$

$$\sigma_{yy} = ax + by, (a, b, c, d \text{ 是常数})$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0.$$

为什么剪应力 σ_{xy} 必须假设是平衡的？假定平板材料是各向同性的并遵循虎克定律。应变是什么？它们相容吗？如果常数 $a=b=0$，但 c 和 d 不为零，满足什么类型的边界条件？

4 主应力与主轴

主应力，应力不变量，应力偏量及最大剪应力都是重要的概念，它们以最简单的数值形式告诉我们应力状态。它们与材料的破坏强度直接有关，人们必须经常计算它们。因此我们专门用一章来讨论。

4.1 引 言

我们已经看到，描述物体内任意给定点上的物质相互作用状态必须要九个应力分量，其中六个是独立的。这九个应力分量组成一个对称矩阵

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}).$$

在坐标旋转情况下，矩阵分量的变换与张量分量的变换一样。以后我们将证明，由于应力张量是对称的，所以可找到一套坐标使应力分量矩阵化为对角矩阵形式。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

主轴是一组特殊的坐标轴，对于主轴，应力矩阵是对角的，相应的应力分量称为**主应力**。由主轴所决定的坐标平面称为**主平面**。

从物理上讲,每一个主应力就是作用在一个主平面上的正应力。在主平面上,应力向量垂直于平面,没有剪切分量。

知道主轴和主应力,显然是有用的,因为它们帮助我们把任意点上的应力状态形象化。事实上,问题是如此的重要,以致在解决连续介质力学问题时,在把最后结果化为主值以前,我们的工作不能算完成。我们不仅需要知道主应力的存在,从原则上可以找到它,而且还要知道求出它们的实际方法。我们将证明,应力张量的对称性是主轴存在的基本理由。用类似的相同数学过程可以证明其他的对称张量,像应变张量,也必定有主轴和主值。其实,一个实数值对称矩阵可以化为一个主矩阵的证明,不限于三维,而且可以推广到 n 维,甚至是无限维。我们将发现,当研究弹性体的机械振动,或者一般的声学问题时,这样一种推广是非常重要的。在振动理论中,主值相应于振动频率,主坐标描述振动的主振型。我们现在将不去讨论这些题目,而只是指出我们将要研究的题目比单独的应力具有更广泛的应用。

另一方面,如果张量是非对称的,就既不能保障有实数主值存在,也无借助坐标轴旋转化为对角形的可能性。对称的确是一种很可贵的性质。

作为介绍,我们将比较详细地考察二维情况。然后再用简缩符号来考察三维情形。最后,用主应力来讨论应力状态的一些几何表示法,并介绍一些另外的定义。

4.2 平面应力状态

考察一个简化的物理情况。在这种情况下,作用在薄膜边缘并位于薄膜平面内的力使薄膜受到拉伸。在图 4.1 中表示一个例子。令面 $z=h$ 和 $z=-h$ 自由(不受力)。在这种情况,可以有把握地讲,由于应力分量 σ_{zz}, σ_{zy}, σ_{zx} 在表面上为零,并且薄膜很薄,所以它们在整个薄膜内近似地为零

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0. \qquad (4.2\text{-}1)$$

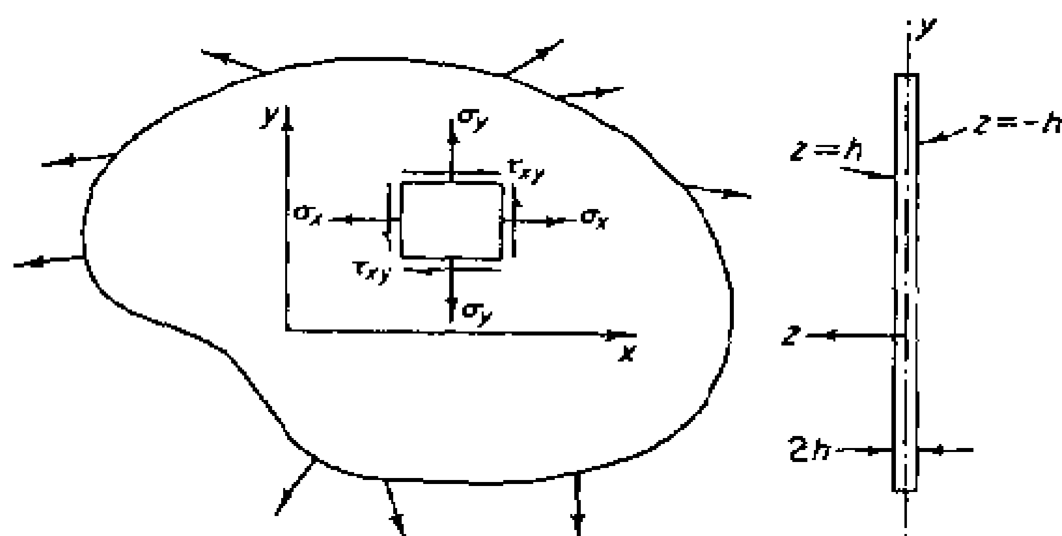


图 4.1　一个近似的平面应力状态

使得上面方程能够成立的应力状态称为在 xy 平面内的**平面应力状态**。显然,在平面应力中,只涉及到对称矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

中的应力分量。这里,为清楚起见,我们用 σ_x 代 σ_{xx},σ_y 代 σ_{yy},τ_{xy}代 σ_{xy}。

现在来考察坐标 xy 旋转到 $x'y'$,并用 3.6 节的结果求新参考标架中的应力分量

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在这种情形下,两个直角笛卡儿坐标系间的方向余弦,可以用单个角度 θ 表示。见图 4.2。方向余弦矩阵是

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4.2\text{-}2)$$

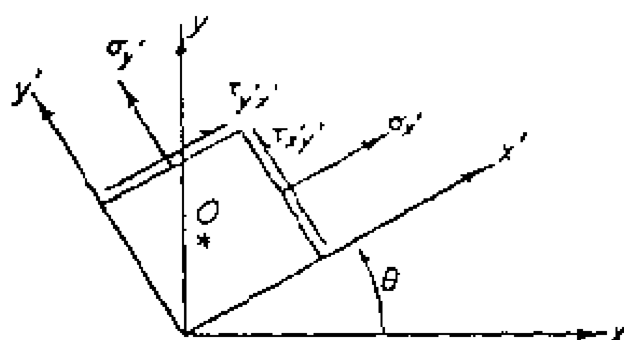


图 4.2　平面应力状态中的坐标变化

用 x,y 和 x',y' 代替 x_1,x_2 和 x'_1,x'_2；σ_x 代 τ_{11}；τ_{xy}代 τ_{12}等等，按照方程(4.2-2)辨认方向余弦 β_{ij}，代入到方程(3.5-3)中，得到

$$\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta, \tag{4.2-3}$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x\sin^2\theta + \sigma_y\cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta, \tag{4.2-4}$$

$$\tau_{x'y'} = (-\sigma_x + \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta). \tag{4.2-5}$$

因为

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos2\theta),\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos2\theta),$$

我们可以把上述方程写作

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos2\theta + \tau_{xy}\sin2\theta, \tag{4.2-6}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos2\theta - \tau_{xy}\sin2\theta, \tag{4.2-7}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin2\theta + \tau_{xy}\cos2\theta. \tag{4.2-8}$$

我们可以从这些方程推出

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y, \tag{4.2-9}$$

$$\frac{\partial\sigma_{x'}}{\partial\theta} = 2\tau_{x'y'},\frac{\partial\sigma_{y'}}{\partial\theta} = -2\tau_{x'y'}, \tag{4.2-10}$$

$$当\ \tan2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},\tau_{x'y'} = 0. \tag{4.2-11}$$

相应于方程(4.2-11)所给定的 θ 值的 $x'y'$ 轴的方向称为主方向；因此，x'，y' 轴称为主轴，$\sigma_{x'}$，$\sigma_{y'}$ 称为主应力。

如果 x', y' 是主轴,那么 $\tau_{x'y'}=0$,并且由方程(4.2-10)证明,$\sigma_{x'}$对于所有选择的 θ,或者是最大,或者是是小。类似地,$\sigma_{y'}$的情况也是这样。把方程(4.2-11)得到的 θ 代入方程(4.2-6)和(4.2-7),就得到结果

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}. \quad ▲(4.2\text{-}12)$$

在另一方面,从方程(4.2-8)将 $\tau_{x'y'}$对 θ 微分,并令导数等于零,就可以找到 $\tau_{x'y'}$达到极值时的角度 θ。可以证明,这个角度与方程(4.2-11)给出的主方向差±45°,$\tau_{x'y'}$的最大值是

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}. \quad ▲(4.2\text{-}13)$$

这是作用在所有平行于 z 轴的平面上的最大剪应力。当还要考察与 z 轴倾斜的平面时,某些其他平面可能具有高于这个值的剪应力。(见 4.8 节)

4.3 平面应力莫尔圆

上节中所给方程的几何表示法是由莫尔(O. Mohr)(Zivilingenieur,1882,p.113)给出的。在图 4.3 中表示了一个例子,作用在表面上的正应力和剪应力画在一个应力平面上。其中横坐标代表正应力,纵坐标代表剪应力。对正应力来讲,拉伸为正,压缩为负。对剪应力来讲,需要一个特殊的规则,我们指定,当元素一个面上的剪应力对元素的中心点 O 产生顺时针力矩时,它取为正(见图 4.2)。对中心 O 产生反时针力矩的剪应力取为负(此规定仅对莫尔圆构造适用)。于是,图 4.2 中 $\tau_{x'y'}$被认为是负的,$\tau_{y'x'}$被认为是正的。遵循这个特殊规则,在图 4.3 中,我们画出点 A,它的横坐标是 σ_x,纵坐标是 $-\tau_{xy}$;点 B 的横坐标为 σ_y,纵坐标为 τ_{yx}。连接 AB 线,它与 σ 轴交于 C。以 C 为中心,通过 A 和 B 画一个圆,这就是莫尔圆。

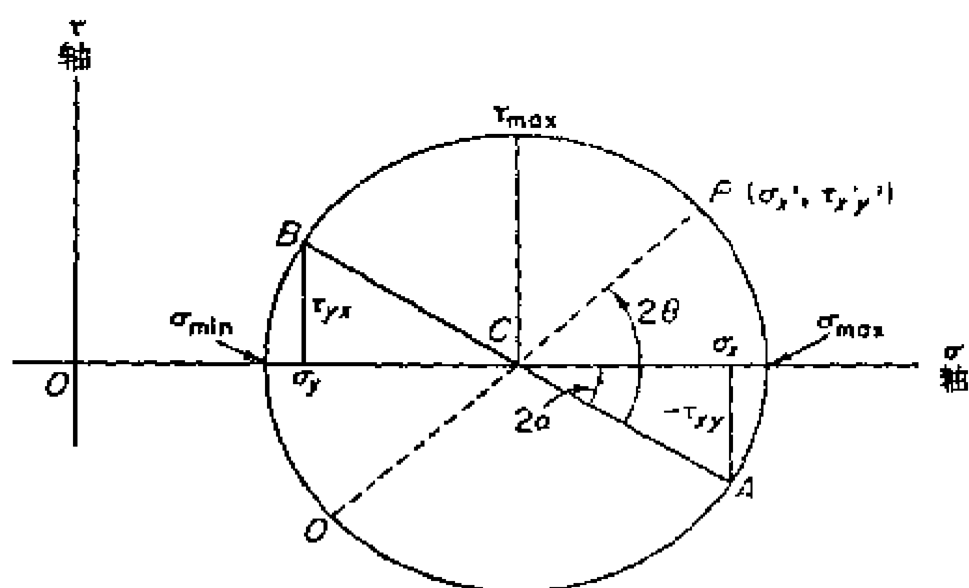


图 4.3 平面应力莫尔圆

为得到作用在其法线在反时针方向与 x 轴成角度 θ 的某一个面上的应力，我们画一个与 CA 线夹角为 2θ 的半径 CP，如图 4.3 所示。那么，P 的横坐标给出该面上的正应力，纵坐标给出剪应力。位于直径 PQ 另一端的点，代表作用在其法线与 x 轴成 $\theta+(\pi/2)$ 角的那个面上的应力。

为了证明这个作图是正确的，我们注意到，莫尔圆的圆心位于 C，这里

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \tag{4.3-1}$$

半径

$$\overline{AC} = \overline{CP} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{4.3-2}$$

从图 4.3，我们看出 P 的横坐标是

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \overline{OC} + \overline{CP}\cos(2\theta - 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + \overline{CP}(\cos 2\theta\cos 2\alpha + \sin 2\theta\sin 2\alpha).\end{aligned} \tag{4.3-3}$$

但是，我们从图也看到

$$\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\,\overline{CP}}, \sin 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\overline{CP}}. \tag{4.3-4}$$

把这些结果代入方程(4.3-3),得

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta, \qquad (4.3\text{-}5)$$

它正好与方程(4.2-6)一样。

类似地,P 点的纵坐标为

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= \overline{CP}\sin(2\theta - 2\alpha) \\ &= \overline{CP}(\sin 2\theta\cos 2\alpha - \cos 2\theta\sin 2\alpha) \qquad (4.3\text{-}6) \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta.\end{aligned}$$

它与方程(4.2-8)的大小相等,但符号相反。符号是由这里对莫尔圆所采取的约定所决定的。按照方程(4.2-8),正值 $\tau_{x'y'}$ 应是反时针力矩,在莫尔圆上应为负的纵坐标。因此全部符合,莫尔圆的正确性得到了证实。

莫尔圆给出了平面应力状态中一点上的应力是如何变化的形象图形,它告诉我们,如何判定主轴的位置。它向我们指出,最大剪应力的作用平面与主平面成 45°。但实际上用解方程(4.5-3)的途径来直接计算主应力是更快的方法。

4.4* 三维应力状态的莫尔圆

令 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是一点的主应力,作用在任意剖面上应力向量的分量,可以用张量变换定律,方程(3.6-3)求得。莫尔证明了一个有趣的结果,即如果把作用在任意剖面上的正应力 $\sigma_{(n)}$ 和剪应力 τ 画在一个平面上,这个平面以 σ 和 τ 为坐标,如图 4.4 所示,那么它们将一定落在图上用阴影面积表示的闭域内,这个闭域的边界是中心均在 σ 轴上的三个圆。

这个结果在显示下面这一点是富有启发性的,即,确实如果 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$,那么 σ_1 是最大应力,$(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 对所有可能的面来讲是最大剪应力。最大剪应力作用面与 σ_1 和 σ_3 作用的主平面倾斜 45°。

我们可以容易地解释图 4.4 中三个边界圆的意义。把 x,y,z 轴选在主轴方向。在一个垂直于 x 轴的平面上，作用一个正应力，譬如说 σ_1，没有剪应力，在垂直于 y 轴的平面上，作用一个正应力，譬如说 σ_2，没有剪应力。现在，考察所有平行于 z 轴的平面。作用于这些平面上的正应力和剪应力正好由方程(4.2-3)到(4.2-5)或由方程(4.2-6)到(4.2-8)给出。因此，4.3 节描述的莫尔圆适用，而且经过 σ_1,σ_2 点的圆代表作用在这些平面上所有应力状态的总体。类似地，其它两个圆(一个经过 σ_2,σ_3，另一个经过 σ_3,σ_1)代表作用在平行于 x 轴，或是 y 轴的所有平面上的所有应力状态的总体。剩下的仅是要证明其他平面上的应力落在阴影范围。本书以前的版本曾给出证明。它十分冗长故这里删去。

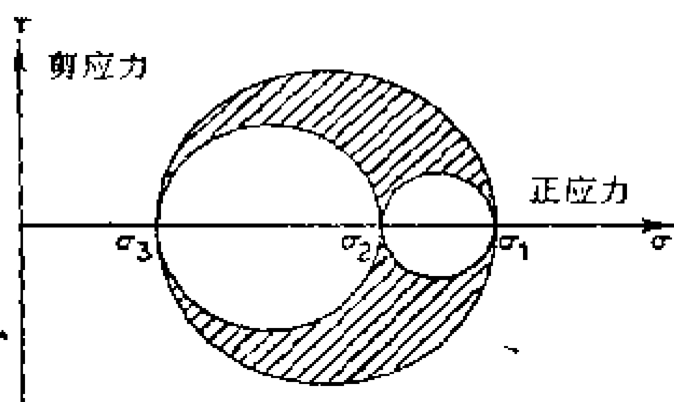


图 4.4　莫尔圆

4.5　主应力

在一般应力状态中，作用在法线为 ν 的面上应力向量取决于 ν 的方向。在物体一给定点，应力向量和 ν 的夹角随面的取向面变，我们将证明，总可找到这样一个面，其方位使得应力向量正好与它垂直。事实上，我们将证明，在物体内任何一点，至少有三个互相垂直的面满足这个要求。这样一种面称主平面；它的法线就是主轴；作用在主平面上的正应力的值就是主应力。

令 ν 是主轴方向的单位向量，σ 是相应的主应力。因此作用在

垂直于 ν 的平面上的应力向量有分量 $\sigma\nu_i$。另一方面，这个同一向量由式 $\tau_{ji}\nu_j$ 给出，其中 τ_{ij} 是应力张量。因此，写出 $\nu_i=\delta_{ji}\nu_j$，令这两个表达式相等，再移到一边，就有

$$(\tau_{ji}-\sigma\delta_{ji})\nu_j=0,(i=1,2,3) \tag{4.5-1}$$

这三个方程可用来求解 ν_1,ν_2,ν_3。因为 ν 是单位向量，我们必须寻找使 $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$ 的一组非平凡解。于是，方程(4.5-1)提出一个特征值问题。因为 τ_{ij} 作为一个矩阵是实数值的，对称的，我们只需记起矩阵理论中的结果即可断言，存在三个实数值主应力及一组正交主轴。主应力是否全为正，全为负，或者混合，取决于二次型 $\tau_{ij}x_ix_j$ 分别是否为正定，负定或不定。然而，因为这些结果很重要，我们在下面将重新推导它们。

方程组(4.5-1)有一组非零解 ν_1,ν_2,ν_3 的充分必要条件是它的系数行列式为零，即

$$|\tau_{ij}-\sigma\delta_{ij}|=0. \tag{4.5-2}$$

方程(4.5-2)是 σ 的三次方程；它的根是主应力。对于每一个主应力值，可以决定一个单位法向量 ν。

展开方程(4.5-2)，有

$$|\tau_{ij}-\sigma\delta_{ij}|=\begin{vmatrix}\tau_{11}-\sigma & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \tau_{22}-\sigma & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}-\sigma\end{vmatrix} \tag{4.5-3}$$

$$=-\sigma^3+I_1\sigma^2-I_2\sigma+I_3=0,$$

其中

$$I_1=\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}, \tag{4.5-4}$$

$$I_2=\begin{vmatrix}\tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{32} & \tau_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\tau_{33} & \tau_{31}\\ \tau_{13} & \tau_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\tau_{11} & \tau_{12}\\ \tau_{21} & \tau_{22}\end{vmatrix}, \tag{4.5-5}$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}\end{vmatrix}. \tag{4.5-6}$$

另一方面，如果 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 是方程(4.5-3)的根，此式可以写为

$$(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)=0, \tag{4.5-7}$$

可以看出,根与系数之间必定保持如下关系:

$$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3, \tag{4.5-8}$$

$$I_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1, \tag{4.5-9}$$

$$I_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3. \tag{4.5-10}$$

因为主应力表征一点上应力的物理状态,所以它们与任何参考坐标无关。因此,方程(4.5-7)与参考坐标的方位无关。但是方程(4.5-7)正好与(4.5-3)一样。因此,坐标旋转时,方程(4.5-3)和系数 I_1, I_2, I_3 是不变的。I_1, I_2, I_3 称为对坐标旋转的应力张量**不变量**。

我们现在将证明,对一个对称应力张量,三个主应力都是实数,三个主平面互相垂直。当应力张量对称时,即

$$\tau_{ij}=\tau_{ji}, \tag{4.5-11}$$

就可以建立这些重要的特性。其证明如下:$\overset{1}{\nu}, \overset{2}{\nu}, \overset{3}{\nu}$ 是主轴方向的单位向量,其分量 $\overset{1}{\nu}_i, \overset{2}{\nu}_i, \overset{3}{\nu}_i (i=1,2,3)$ 分别是相应于根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的方程(4.5-1)的解,那么

$$\begin{aligned}(\tau_{ij}-\sigma_1\delta_{ij})\overset{1}{\nu}_j&=0,\\(\tau_{ij}-\sigma_2\delta_{ij})\overset{2}{\nu}_j&=0,\\(\tau_{ij}-\sigma_3\delta_{ij})\overset{3}{\nu}_j&=0.\end{aligned} \tag{4.5-12}$$

用 $\overset{2}{\nu}_i$ 乘第一个方程,$\overset{1}{\nu}_i$ 乘第二个方程,对 i 求和,并将所得方程相减,即得

$$(\sigma_2-\sigma_1)\overset{1}{\nu}_i\overset{2}{\nu}_i=0. \tag{4.5-13}$$

在推导过程中,涉及了对称条件(4.5-11),它意味着

$$\tau_{ij}\overset{1}{\nu}_j\overset{2}{\nu}_i=\tau_{ji}\overset{1}{\nu}_j\overset{2}{\nu}_i=\tau_{ij}\overset{2}{\nu}_j\overset{1}{\nu}_i, \tag{4.5-14}$$

该式是由交换哑指标 i 与 j 得到的。

现在,如果我们试着假设,方程(4.5-3)有复根,那么,因为方程(4.5-3)中的系数是实数,所以必定存在共轭复根。根的集合可以写为

$$\sigma_1 = \alpha + i\beta, \quad \sigma_2 = \alpha - i\beta, \quad \sigma_3,$$

其中α，β，σ_3是实数，i是虚数 $\sqrt{-1}$。在这种情况下，由方程(4.5-12)证明$\overset{1}{\nu}_j$和$\overset{2}{\nu}_j$互相共轭，并可以写为

$$\overset{1}{\nu}_j = a_j + ib_j, \qquad \overset{2}{\nu}_j = a_j - ib_j.$$

因此

$$\begin{aligned}\overset{1}{\nu}_j \overset{2}{\nu}_j &= (a_j + ib_j)(a_j - ib_j)\\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0.\end{aligned}$$

从方程(4.5-13)得到$\sigma_1 - \sigma_2 = 2i\beta = 0$，或$\beta = 0$。这与原来认为根是复数的假设相矛盾。于是，假设存在复根是站不住脚的，根σ_1，σ_2，σ_3都是实数。

当$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$，方程(4.5-13)以及类似的方程意味着

$$\overset{1}{\nu}_i \overset{2}{\nu}_i = 0, \quad \overset{2}{\nu}_i \overset{3}{\nu}_i = 0, \quad \overset{3}{\nu}_i \overset{1}{\nu}_i = 0; \tag{4.5-15}$$

即，主向量互相垂直。如果$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$，则$\overset{3}{\nu}_i$不变，但是我们可以决定无数对与$\overset{3}{\nu}_i$正交的向量$\overset{1}{\nu}_i$和$\overset{2}{\nu}_i$。如果$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$，那么任何一组正交轴都可以取为主轴。

如果把参考轴选择得与主轴一致，那么应力分量矩阵变为

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix}. \tag{4.5-16}$$

4.6 剪应力

我们已经看到，在单位外法线为ν(具有分量ν_i)的面元素上，作用一个面力$\overset{\nu}{T}$，($\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji}\nu_j$)$\overset{\nu}{T}$在$\nu$方向的分量是作用在面元素上的正应力。令$\sigma_{(n)}$表示这个正应力。因为一个向量在单位向量方向上的分量，用这两个向量的数量积给出，得到

$$\sigma_{(n)} = \overset{\nu}{T}_i \nu_i = \tau_{ij}\nu_i\nu_j, \tag{4.6-1}$$

另一方面，因为向量 $\overset{\nu}{T}$ 可以分解成两个正交的分量 $\sigma_{(n)}$ 和 τ，其中 τ 表示与面相切的剪应力（见图 4.5），我们看到，在法线为 ν 的面上，剪应力的大小由方程

$$\tau^2 = |\overset{\nu}{T}_i|^2 - \sigma_{(n)}^2 \tag{4.6-2}$$

给出。

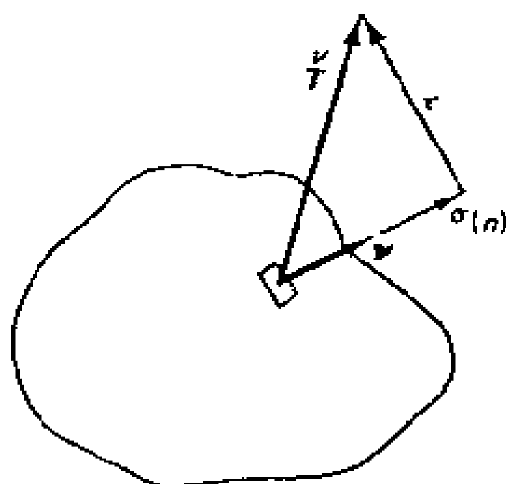


图 4.5 符号

把主轴选为坐标轴，并令 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是主应力。那么

$$\overset{\nu}{T}_1 = \sigma_1\nu_1, \quad \overset{\nu}{T}_2 = \sigma_2\nu_2, \quad \overset{\nu}{T}_3 = \sigma_3\nu_3, \tag{4.6-3}$$

$$|\overset{\nu}{T}_i|^2 = (\sigma_1\nu_1)^2 + (\sigma_2\nu_2)^2 + (\sigma_3\nu_3)^2,$$

并从方程(4.6-1)，有

$$\sigma_{(n)} = \sigma_1\nu_1^2 + \sigma_2\nu_2^2 + \sigma_3\nu_3^2, \tag{4.6-4}$$

$$\sigma_{(n)}^2 = [\sigma_1\nu_1^2 + \sigma_2\nu_2^2 + \sigma_3\nu_3^2]^2. \tag{4.6-5}$$

代入方程(4.6-2)，并注意到

$$\begin{aligned}(\nu_1)^2 - (\nu_1)^4 &= (\nu_1)^2[1 - (\nu_1)^2] \\ &= (\nu_1)^2[(\nu_2)^2 + (\nu_3)^2],\end{aligned} \tag{4.6-6}$$

我们看到

$$\begin{aligned}\tau^2 = &(\nu_1)^2(\nu_2)^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\nu_2)^2(\nu_3)^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ &+ (\nu_3)^2(\nu_1)^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2.\end{aligned} \tag{4.6-7}$$

例如，如果 $\nu_1 = \nu_2 = 1/\sqrt{2}$，$\nu_3 = 0$，则 $\tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$。

4.7 应力偏斜张量

张量

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}. \qquad (4.7\text{-}1)$$

称为应力偏量，其中 δ_{ij}是克罗内克符号，σ_0 是平均应力。

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$$

$$= \frac{1}{3} I_1, \qquad (4.7\text{-}2)$$

其中 I_1 是 4.5 节的第一不变量。把 τ_{ij}分解成静水压部分 $\sigma_0\delta_{ij}$和偏量 τ'_{ij}，在描述金属的塑性行为中是非常重要的。

应力偏量的第一不变量总为零，

$$I'_1 = \tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33} = 0. \qquad (4.7\text{-}3)$$

为了决定主应力偏量，可以遵循 4.5 节的过程。行列式方程

$$|\tau'_{ij} - \sigma' \delta_{ij}| = 0 \qquad (4.7\text{-}4)$$

可以展成

$$\sigma'^3 - J_2 \sigma' - J_3 = 0. \qquad (4.7\text{-}5)$$

的形式。容易证明，联系 J_2, J_3 与 4.5 节定义的不变量 I_2, I_3 的下列方程

$$J_2 = 3\sigma_0^2 - I_2, \qquad (4.7\text{-}6)$$

$$J_3 = I_3 - I_2\sigma_0 + 2\sigma_0^3 = I_3 + J_2\sigma_0 - \sigma_0^3, \qquad (4.7\text{-}7)$$

并由方程(4.7-3)，得到下面的另一种表示式

$$J_2 = -\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'_{22}\tau'_{33} - \tau'_{33}\tau'_{11} + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{6}[(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2]$$

$$+ (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{2}[(\tau'_{11})^2 + (\tau'_{22})^2 + (\tau'_{33})^2] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$(4.7\text{-}8)$$

因此 $$J_2=\frac{1}{2}\tau'_{ij}\tau'_{ij}. \tag{4.7-9}$$

为了验证所有四个方程，我们首先注意到，因为 J_2，J_3 和 I_2，I_3 都是不变量，所以，对特定选择的参考标架足以证实关系(4.7-6)和(4.7-7)了。我们观察到，应力张量主轴与应力偏量主轴一致。把 x_1，x_2，x_3 选在主轴方向，那么，若 σ'_1，σ'_2，σ'_3 是主应力偏量，则有

$$\sigma'_1=\sigma_1-\sigma_0, \sigma'_2=\sigma_2-\sigma_0, \sigma'_3=\sigma_3-\sigma_0, \tag{4.7-10}$$

$$J_2=-(\sigma'_1\sigma'_2+\sigma'_2\sigma'_3+\sigma'_3\sigma'_1), \tag{4.7-11}$$

$$J_3=\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3. \tag{4.7-12}$$

注意，(4.7-11)中的负号是由于在(4.7-5)中我们选择的符号所致。如果我们从式(4.7-8)的最后两行观察到如此定义的 J_2 确实是正定的话，这种选择的理由就会变得很明显。把(4.7-10)直接代入(4.7-11)，得

$$\begin{aligned}J_2&=-(\sigma_1-\sigma_0)(\sigma_2-\sigma_0)-(\sigma_2-\sigma_0)(\sigma_3-\sigma_0)\\&\quad-(\sigma_3-\sigma_0)(\sigma_1-\sigma_0)\\&=-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)+2\sigma_0(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)-3\sigma_0^2\\&=-I_2+6\sigma_0^2-3\sigma_0^2=3\sigma_0^2-I_2,\end{aligned}$$

它证实了(4.7-6)。类似地，把(4.7-10)代入(4.7-12)，就证实(4.7-7)。现在转回来讲任意方位的参考标架。直接令(4.7-5)中的系数与(4.7-4)中的系数相同，得到如同(4.5-5)类似的结果

$$J_2=-\begin{vmatrix}\tau'_{22} & \tau'_{23}\\ \tau'_{32} & \tau'_{33}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\tau'_{33} & \tau'_{31}\\ \tau'_{13} & \tau'_{11}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\tau'_{11} & \tau'_{12}\\ \tau'_{21} & \tau'_{22}\end{vmatrix}. \tag{4.7-13}$$

展开行列式，得到了(4.7-8)的第一行。在 τ'_{12}，τ'_{23}，τ'_{31}上的撇号可以略去，因为它们分别等于 τ_{12}，τ_{23}，τ_{31}。如果把等于零的量 $\frac{1}{2}(\tau'_{11}+\tau'_{22}+\tau'_{33})^2$ 加到第一行上去，并化简结果，就得到(4.7-8)的第二式。为了得到(4.7-8)的第三式，我们首先注意到

$$\tau_{11}-\tau_{22}=(\tau_{11}-\sigma_0)-(\tau_{22}-\sigma_0)=\tau'_{11}-\tau'_{22}.$$

因此，

$$(\tau_{11}-\tau_{22})^2+(\tau_{22}-\tau_{33})^2+(\tau_{33}-\tau_{11})^2$$
$$=2(\tau'^2_{11}+\tau'^2_{22}+\tau'^2_{33})-2(\tau'_{11}\tau'_{22}+\tau'_{22}\tau'_{33}+\tau'_{33}\tau'_{11}).$$

在右边加上零量$(\tau'_{11}+\tau'_{22}+\tau'_{33})^2$，和就化简为$3(\tau'^2_{11}+\tau'^2_{22}+\tau'^2_{33})$。因此，(4.7-8)的最后两个等式相等是明显的。最后的方程(4.7-9)没有什么可讲，只不过是(4.7-8)第三行的不同表述方式而已。于是，每一个方程都得到证明。

应用例子：压力容器中的材料试验

如果在实验室做一个简支钢梁试验〔图 4.6(*a*)〕，侧向载荷 P 加在中心，P 与受载荷下挠度 δ 间的关系如图 4.6(*b*)中所示的曲线。屈服点是这样一个点，在这点上，P-δ 曲线与经过原点的直线偏离一指定量。如果设计一个梁来支持一个工程结构，它所受的载荷不应超过屈服点，因为超过这个点，挠度就会迅速而且是不可逆地增加，产生了“永久变形”。

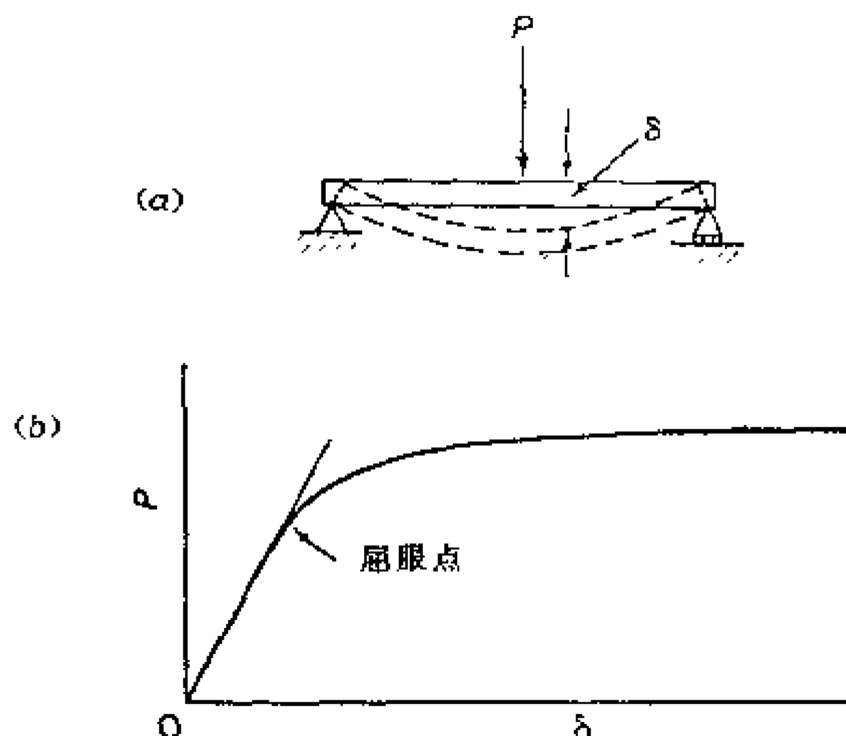


图 4.6　在高压容器中梁的试验

(*a*)梁；(*b*)载荷挠度曲线

现在，我们要提出这样一个问题：如果要做一个梁，用来作为

太平洋里 10911m 深处的马里兰沟内的一个仪器。试问载荷-挠度曲线应该是什么样子？海洋深处的静水压会改变梁的载荷挠度曲线吗？

类似这样的问题，地震学家、地质学家、工程师和材料科学家是非常感兴趣的。尽管没有人做过这样一种海洋深处的试验，然而布雷德曼(P. W. Bridgman，1882～1961 年)在哈佛做过一个模拟试验。他造了一个试验容器，在容器中，达到了接近海洋深处那样大压力的高压。试验结果指出，P-δ 曲线实际上是不受静水压力影响的。

因此，材料的屈服是不受静水压影响的。屈服与应力或应变有关，但是只和与静水压力无关的那部分应力张量或应变张量有关。这就导致了在方程(4.7-1)中定义的应力偏量 τ'_{ij} 的观点，对于它，静水压部分 τ'_{aa} 为零。材料屈服与 τ_{ij} 无关，而与 τ'_{ij} 有关。

4.8 拉梅(Lame′)应力椭球

在单位外法线向量为 $\nu(\nu_i)$ 的任一个面元素上作用一个面力 $\overset{\nu}{T}$，其分量为

$$\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji}\nu_j.$$

把应力张量主轴选为坐标轴 x_1, x_2, x_3，并把主应力写为 σ_1，σ_2，σ_3。那么，

$$\tau_{ij} = 0,$$

及

$$\overset{\nu}{T}_1 = \sigma_1\nu_1, \quad \overset{\nu}{T}_2 = \sigma_2\nu_2, \quad \overset{\nu}{T}_3 = \sigma_3\nu_3. \tag{4.8-1}$$

因为 ν 是单位向量，有

$$(\nu_1)^2 + (\nu_2)^2 + (\nu_3)^2 = 1. \tag{4.8-2}$$

对 ν_i 解方程(4.8-1)，代入(4.8-2)，我们看到，$\overset{\nu}{T}_i$ 的分量满足方程

$$\frac{(\overset{\nu}{T}_1)^2}{(\sigma_1)^2} + \frac{(\overset{\nu}{T}_2)^2}{(\sigma_2)^2} + \frac{(\overset{\nu}{T}_3)^2}{(\sigma_3)^2} = 1, \tag{4.8-3}$$

它是一个椭球方程，其参考坐标系是以 $\overset{\nu}{T}_1, \overset{\nu}{T}_2, \overset{\nu}{T}_3$ 为轴的直角坐标系。这个椭球是自一个公共中心出发的向量 $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$ 的端点的轨迹（见图 4.7）。

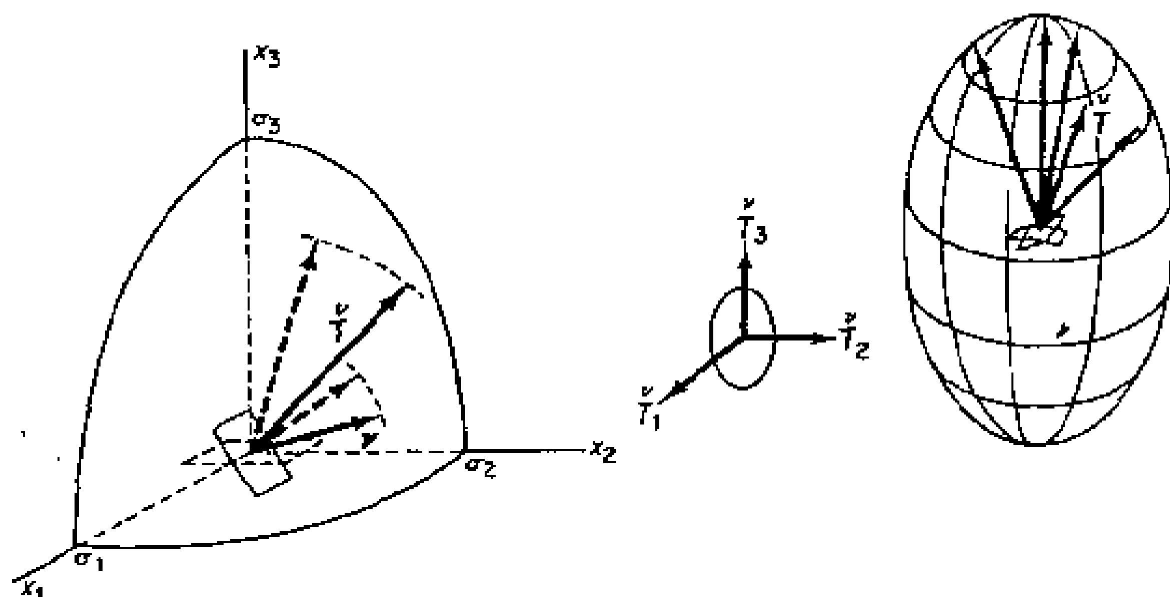


图 4.7　ν 变化时作为向量 $\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}$ 的端点轨迹的应力椭球

习　题　4

习题 4.1　试证 $\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})$，$\tau_{max}$的作用面与最大和最小主应力的方向成 45°角。

解　问题是求 τ 的最大值和最小值。现在，τ^2 用方程(4.6-7)给出。我们必须在约束 $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$ 的条件下，寻求作为 ν_1, ν_2, ν_3 函数的 τ^2 的极值。应用拉格朗日乘子法，我们设法使如下函数为最小，

$$f \equiv \nu_1^2\nu_2^2(\sigma_1-\sigma_2)^2+\nu_2^2\nu_3^2(\sigma_2-\sigma_3)^2-\nu_3^2\nu_1^2(\sigma_3-\sigma_1)^2$$
$$+\lambda(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2-1).$$

用通常方法，计算偏导数 $\partial f/\partial \nu_i$，$\partial f/\partial \lambda$，再令它们等于零，解 ν_1，ν_2，ν_3 和 λ。这导致下面方程

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_1}=0: \quad 2\nu_1\nu_2^2(\sigma_1-\sigma_2)^2+2\nu_1\nu_3^2(\sigma_3-\sigma_1)^2+2\lambda\nu_1=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_2}=0: \quad 2\nu_2\nu_1^2(\sigma_1-\sigma_2)^2+2\nu_2\nu_3^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+2\lambda\nu_2=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_3}=0: \quad 2\nu_3\nu_2^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+2\nu_3\nu_1^2(\sigma_3-\sigma_1)^2+2\lambda\nu_3=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}=0: \quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1. \tag{4}$$

方程(1)的一个解,显然是 $\nu_1=0$,令 $\nu_1=0$,方程(2)和(3)变为

$$\nu_3^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+\lambda=0, \nu_2^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+\lambda=0.$$

只有在 $\nu_2=\nu_3$ 时,这些方程才是协调的。令 $\nu_2=\nu_3$,方程(4)变为 $0+\nu_2^2+\nu_3^2=1$ 或 $\nu_2=1/\sqrt{2}$。因此,第一组解是

$$\nu_1=0, \nu_2=\nu_3=\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda=-\frac{(\sigma_2-\sigma_3)^2}{2}.$$

将这个解代回到 f,或方程(4.6-7)内,就得到 τ^2 的极值

$$\tau_{ext}^2=\frac{(\sigma_2-\sigma_3)^2}{4} \text{ 或 } \tau_{max} \text{ 或 } \tau_{min}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}.$$

依次令 $\nu_2=0,\nu_3=0$,可以得到(1),(2),(3),(4)的其它组解。那么,我们就有相对最大值或最小值

$$\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}.$$

这三者中最大的一个就是 τ 的绝对最大值。因此即得答案。

出现绝对最大剪应力的平面的法线方向由适当的 ν 值给出。无论是哪一个解,都有

$$\nu_i=\nu_j=\frac{1}{\sqrt{2}}, (i\neq j);$$

它意味着与 x_i, x_j 轴倾斜 45°。

4.2 令 $\tau_{xx}=1000\text{kPa}, \tau_{yy}=-1000\text{kPa}, \tau_{zz}=0, \tau_{xy}=500\text{kPa}, \tau_{yz}=-200\text{kPa}, \tau_{zx}=0$。试问作用在法向量为

$$\nu=0.10i+0.30j+\sqrt{0.90}k$$

的面上的总面力是多大?作用在这个面上的应力向量的三个分量(在 x,y,z 方向)是多大?作用在面上的正应力是多大?作用在面上的合剪应力是多大?

答案 面力 = 509kPa, $(\overset{\nu}{T}_i)=(250, -440, -60)$。正应力 $=-164$kPa,剪应力 = 481kPa。

4.3 斯托克斯(G. Stokes)在 1850 年给出了在粘性流(牛顿流)中以等速 U 运动的球(图 $P4.3$)的问题的解。在球的表面,应力向量的三个分量是

$$\overset{\nu}{T}_x=-\frac{x}{a}p_0+\frac{3}{2}\mu\frac{U}{a}, \overset{\nu}{T}_y=-\frac{y}{a}p_0, \overset{\nu}{T}_z=-\frac{z}{a}p_0.$$

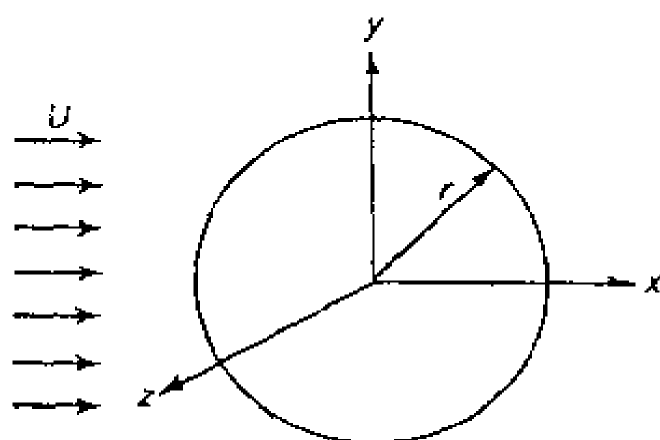


图 $P4.3$　在粘性流中的球(斯托克斯问题)

这里 p_0 是远离球处的压力，求作用在球上的合力。

解　作用在球上的总面力是

$$F_x = \oint \overset{\nu}{T}_x \mathrm{d}S, F_y = \oint \overset{\nu}{T}_y \mathrm{d}S, F_z = \oint \overset{\nu}{T}_z \mathrm{d}S.$$

由对称

$$\oint x\mathrm{d}S = \oint y\mathrm{d}S = \oint z\mathrm{d}S = 0.$$

因此，合力的唯一非零分量是

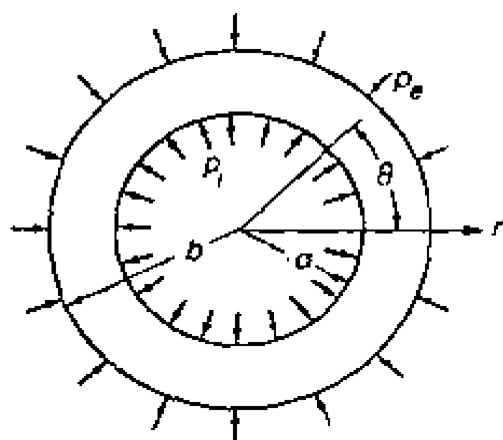
$$F_x = \oint \frac{3}{2}\mu\frac{U}{a}\mathrm{d}S = 4\pi a^2\frac{3}{2}\mu\frac{U}{a} = 6\pi\mu aU.$$

4.4　一厚壁圆柱形弹性管，内外半径分别为 a 和 b，其内压为 p_i 外压为 p_0，见图 $P4.4$。圆柱中的应力是

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2b^2(p_0 - p_i)}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_ia^2 - p_0b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2b^2(p_0 - p_i)}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_ia^2 - p_0b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$



$P4.4$　承受内压的厚壁筒

这里 r 是管中一点的矢径长。求最大主应力所对应的半径和管壁中主应力最大绝对值、壁中 $\sigma_{\theta\theta}$ 的平均值多少。

此解是拉密(Lame')根据线性化弹性理论(第 12 章)假说得到的。应注意壁内应力分布的非均匀性。内壁上应力集中显著。

4.5　假设你在设计一高压容器，例如枪管。靠爆炸产生的压力很大，以至于使最大周向应力 $\sigma_{\theta\theta}$超过许可张应力 σ_{cr}。为了降低内壁上的张应力，你可以热配合一外套于枪管上，此外套趁热时套上，然后冷却，从而给枪管外表面一压力 p_0，此力趋向于减少枪筒壁内的张应力 $\sigma_{\theta\theta}$。设 $\sigma_{\theta\theta}>\sigma_{cr}$，即应力超过许可值，给出一多层枪管的设计，用题目 4.4 给出的结果使该最大主应力$<\sigma_{cr}$。

4.6　人的血管是一值得注意的器官，当无载荷作用于它时，它有可观的残余应力。如果在体内切割一段，其长度缩短 30%～40%。再如果沿径向切开，它将打开成一扇形。这一放开的扇形体是血管零应力状态的一个最佳的近似，因为任何进一步切割不再产生可度量的管壁应变变化。此扇形体构成零应力状态的意义已加以研究（见 Y.C.Fung 的“残余应力在我们的血管中做什么?”，生物医学工程年刊，19：237～249，1991）。现已证明，由于残余应变的存在，在正常存活条件下，周向应变在整个血管壁中的分布是均匀的，从零应力到生理条件的全部应变范围，血管的应力-应变关系是非线性的。但人们如果仅考察从正常存活条件开始的应力-应变的小改变，那么增量应力-应变关系可以线性化，现在假定线性化的应力-应变关系中弹性系数在整个管壁不变。于是在由正常态仅作小变化的限制下，问题 4.4 的 Lame′解适用。现设想一正常健康人突然有了高血压。她或他遭受到一个非正常的血压增量 Δp_i。描述血管壁中的增量应力，它们均匀吗？最大应力在何处？第十三章我们会看到血管会在响应增量应力时重建自己。

4.7　<u>应力集中</u>　一个带有圆孔的板，在两端承受均匀静拉伸载荷作用，正应力 σ_x＝常数＝p。试描述此板的边界条件。

如果板由线弹性材料组成，已知解为

$$\sigma_r=\frac{p}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left[1+\left(1-3\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right],$$

$$\sigma_\theta=\frac{p}{2}\left[1-\frac{a^2}{r^2}-\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right],$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{p}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1+3\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta.$$

(*a*)检验应力边界条件，看看它们是否满足。

(*b*)求最大正应力 σ_θ 点的位置。

(*c*)求整个板内的最大剪应力。

(*d*)求板内最大主应力。

注　你看到最大应力沿孔的周围是增加的，这就是应力集中现象。

答案　(a)水平边缘和圆孔处是不受外力的。在孔上，边界条件是当 $r=a$ 时，$\sigma_{rr}=0$，$\tau_{r\theta}=0$。

(b)当 $\theta=\pi/2$ 时，σ_θ 达到最大值 $3p$。

(c)最大剪应力等于 $3p/2$，发生在 $r=a$，$\theta=\pi/2$ 处，作用在与 x 轴倾斜 45°的平面内。

(d)最大主应力是 $3p$。

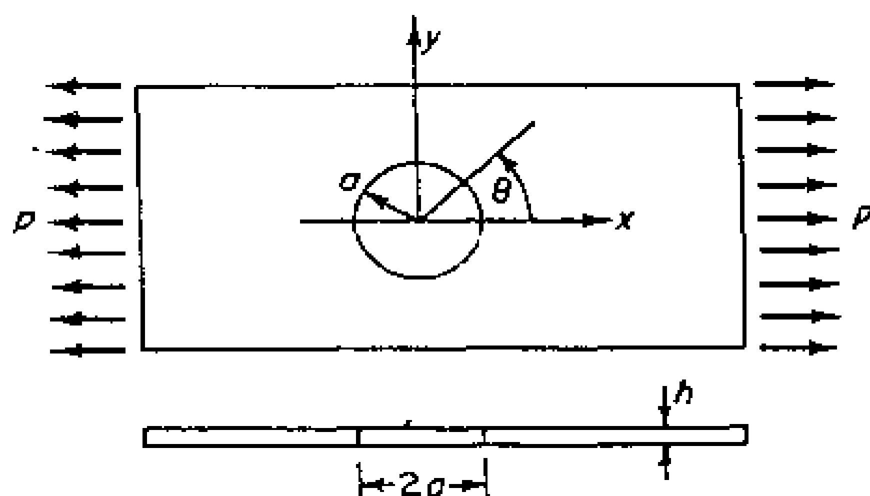


图 $P4.7$　薄板中圆孔

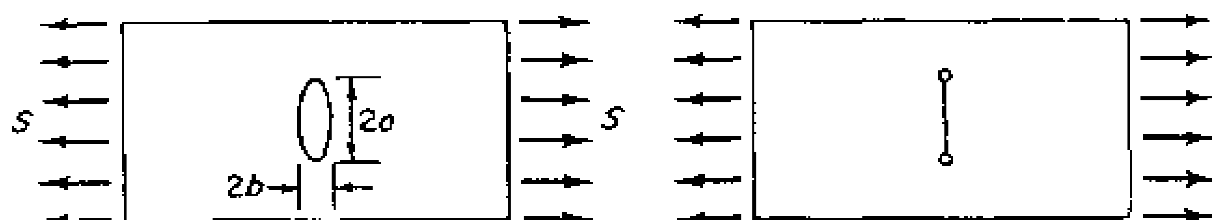


图 $P4.8$　板内椭圆孔用钻孔来减轻应力

4.8　带椭圆孔的无限板，在与其短轴平行的方向受拉伸应力 S 作用，这种问题给出结果：孔的长轴两端处的拉应力是

$$\sigma = S\left(1 + 2\frac{a}{b}\right),$$

其中，$2a$ 是椭圆长轴，$2b$ 是短轴(图 $P4.8$)。你从这一结果学到了什么？

飞机壁上的一条裂纹可以模拟成一拉长的椭圆形孔。如果一裂纹垂直于拉伸方向将是很危险的，为什么？

解释在裂纹两端钻孔的好处。这些孔能帮助阻止裂纹的扩展吗?

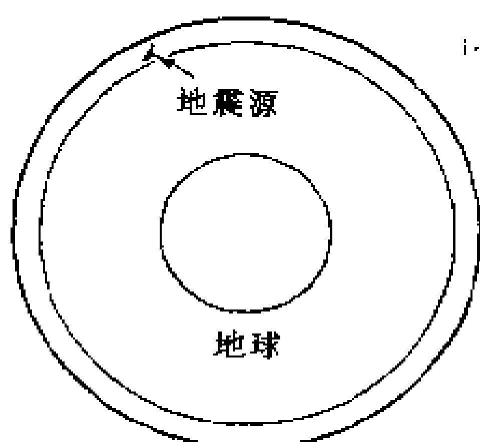


图 P4.9 地震

4.9 一次地震在 $t=0$ 时于震源 e 产生(见图 P4.9)。分析地震后围绕地球的地震波是不容易的,但形成一个数学问题并不难。运动方程和连续性方程留到第十章后再议,写出应包含的全部边界条件:地表,地球外层表面,地心的边界和震源。地震通常是由于震源处的剪切断裂,释放残余应变及其应变能引发的。

4.10 设想你是负责一重要项目的工程师,你必须测试你要使用的材料的强度。最重要的试验之一是确定材料的单向拉伸强度。设计一种机器来做这件事;设计试样的形状和结构;解释设计原理。图 P4.10 画出一种试样,它合理吗?在这一讨论中样品中应力分布应予考虑,力在试样中的传递方式是重要的。

假如你正在为一个生物学家设计此设备,他对软组织,例如肌肉、腱、皮肤和血管强度感兴趣。那么,做一个如图 P4.10 的试样是不实际的,如何取而代之?


图 P4.10 拉伸试件

4.11 混凝土、岩石和骨受压时是坚固的,通常的功能是承受压力。为测量其受压强度,某些与问题 4-10 中十分不同的因素必须加以考虑。设计压力实验的材料试样。

4.12 用一个锤子垂直地冲击一个半无限大的弹性平面(图 P4.12)。试问施加了什么样的边界条件?

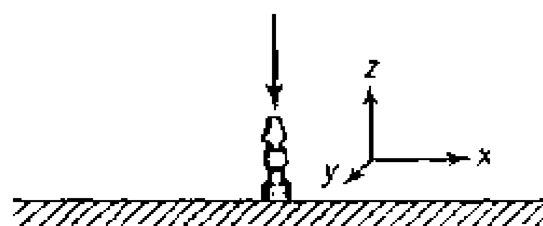


图 P4.12 锤子

解 初始条件:变形到处为零,当锤子打击时,边界条件是

(a)在平面上,但不是在锤子下面

$$\overset{\nu}{T}_i = 0, (i = 1,2,3)$$

(b)半无限体内无限远处的条件：令 u_i 是物体变形引起的位移分量，σ_{ij}是应力；那么

$$(u_i) = 0, (\sigma_{ij}) = 0; (i,j = 1,2,3)$$

(c)在锤子下面的桌面上，面力与位移必须一致。因此，如果用(T)和(H)分别代表桌子和锤子，那么在共同界面上，必有

$$u_i^{(T)} = u_i^{(H)}, \overset{\nu}{T}_i^{(T)} = \overset{\nu}{T}_i^{(H)}.$$

法线ν垂直于用方程 $z=f(x,y,t)$来描述的界面。所以 $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = \partial f/\partial x : \partial f/\partial y : -1$。但是，我们不知道函数 $f(x,y,t)$，只有一同求解锤子和桌面内的整个应力分布问题，才能严格地决定函数 f。

代替精确解，人们可以提出一个近似问题，例如可以假设，当锤击桌面时，垂直于桌子的应力向量的分量必定大大超过切向分量。切向分量必然是由摩擦面产生的。因此，如果略去后面的分量(处于一种称为“润滑”锤的情况中)，那么锤子下面的边界条件可以写为

$$\overset{z}{T}_x = 0, \overset{z}{T}_y = 0, \overset{z}{T}_z = F(x,y)\delta(t).$$

其中 $\delta(t)$是迪拉克(Dirac)单位脉冲函数，当 t 为有限时，$\delta(t)=0$，但是当 $t\to 0$ 时，$\delta(t)$趋于∞，而对于 t 由 $-\theta$ 到 $+\theta$，$\delta(t)$的积分正好等于1，θ 是一个正数。

$F(x,y)$未知。一个简化的假设可能是

$$F(x,y) = \text{const}$$

注意：也许锤和桌面间存在不均匀的接触，局部损坏和滑移等等，如果某人要认真对待这些可能性，他就必须精细地明确指出来并研究其结果。

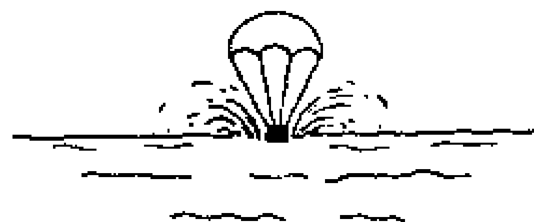


图 P4.13　包装物降落

4.13　假设前面问题中的半无限体是一个非常广阔的水面，载荷是一个自飞机投下的包裹(图 P4.13)，水肯定会飞溅。在这种情况，已知边界条件是什么？

4.14　棕榈树支持自重。

(a)假设树顶重 100kg，顶部横剖面面积是 100cm²。树干比重是 2。树是 10m 高。如果树干是均匀圆筒，试求离地面高 x 处树干内的应力。

试用平衡方程 $\tau_{ij,j}+X_i=0$ 求解这个问题。

(b)设树干横剖面沿指向树根的方向增加，这样会降低应力。试考察这样一个变剖面的树干。用自由体图的办法计算平均应力。

(c)用正确的平衡方程求解(b)部分的问题。需要额外考虑些什么？

(d)如果我们要求由于树的自重产生的纵向应力处处均匀，树干的直径为何随 x 改变？

(e)在问题 1.19 中(第一章)，我们考虑作用在棕榈树上的风载，确定一个直径函数 $D(x)$，使其按方程(1.11-31)计算弯曲应力 σ_0 在树中处处均匀。现同时考虑风和自重；设树干材料强度对拉伸为 σ_1，对压缩为 σ_2。当最大主应力等于 σ_1 时材料断裂；当压应力超过 σ_2 时材料压破。如果"设计"这颗树有均匀最大张应力(与 x 无关)，$D(x)$应是什么样的？如果设计是为了使最大压应力均匀，$D(x)$又应是什么样的？

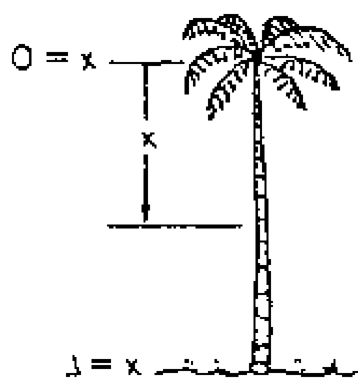


图 $P4.14$ 棕榈树支持它的自重

4.15 $\tau_{\alpha\alpha}$的物理意义是什么？

答案：它是三个正交方向正应力的和。如果我们考察一个在静态条件下的水的立方体，这样所有各边都承受压力 p，表面上没有剪应力作用，因此 $\tau_{\alpha\alpha}=-3p$，或 $p=-\tau_{\alpha\alpha}/3$。

如果在立方体的每一条边上，作用着等强度的均匀拉应力，那么 $\tau_{\alpha\alpha}/3$ 代表此拉应力。

如果三个应力 $\tau_{xx},\tau_{yy},\tau_{zz}$不等，那么 $\tau_{\alpha\alpha}/3$ 代表平均正应力。

4.16 物体内一点上的应力，相对于一组直角笛卡儿坐标 x_1,x_2,x_3 有下面的分量

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

试求不变量 I_1,I_2,I_3 及主应力的值。

答案 $I_1=1,I_2=-2,I_3=0,(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(0,2,-1)$。

4.17 令 τ_{ij}是一个应力张量，试计算乘积(a)$e_{ijk}\tau_{jk}$和(b)$e_{ijk}e_{ist}\tau_{kt}$。

4.18 一个板在 x 方向受拉，y 方向受压，z 方向自由。在平行于 z 轴并与 x 轴倾斜 45°的平面内有一缺陷。如果作用在缺陷上的剪应力超过临界

值 τ_{cr}，板将破坏。试决定板破坏时，σ_x 和 σ_y 的临界组合值。

4.19　考察一个横剖面积为 1cm^2 的杆。

(*a*)假设材料具有下列强度指标，超过这些强度指标，杆就破坏：最大剪应力 400kPa；最大拉应力 1.0MPa；最大压应力 10.0MPa。令一拉力 p 作用在杆上。p 为何值时，杆会破坏？预期的破坏剖面的倾斜角是多少？

(*b*)如果强度指标是：最大剪应力 500kPa；最大拉应力 0.9MPa；最大压应力 10.0MPa，试回答同样的问题。

4.20　一圆柱形杆受轴向载荷拉伸，受弯矩弯曲，受扭矩扭转，结果在柱表面上一点处的微小元素内应力是

$$\sigma_r = 0, \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0, \sigma_z = 1\text{kN/m}^2, \tau_{z\theta} = 2\text{kN/m}^2, \sigma_\theta = 0。$$

试求这点的主应力。

4.21　在地球内部，由于地球重量有一静压力，由于地壳内的应变有一剪应力。在地球内一点上，静压力是 10kN/cm^2，相对于选择的参考标架 x_1, x_2, x_3 所计算的剪应力是 $\tau_{12}=5\text{kN/cm}^2, \tau_{23}=\tau_{31}=0$。试求该点的主应力和主平面。

答案　$\sigma_1=-5$ 作用在法向量为 $\nu_1=-\nu_2=\sqrt{2}/2, \nu_3=0$ 的平面上，这个平面与负 x_1 轴倾斜 45°。伴随主应力 $\sigma_2=-10\text{kN/cm}^2$ 的主轴是 x_3 轴，伴随 $\sigma_3=-15$ 的是与正 x_1 轴倾斜 45°的向量。

4.22　一个驾驶着重 1600kg 的运动着汽车的驾驶员，砰地关上了制动器，做了一个紧急刹车；这样就迅速地刹住轮子。假设轮胎与地面之间的最大摩擦系数是 $\frac{1}{4}$，还假设每个车轮是用四个螺栓连接在轮毂上的。

(*a*)试计算必定作用在每一个螺栓中的剪力。螺栓直径为 1cm，螺栓轴与轮轴相距 6cm，轮轴高出地面 36cm。

(*b*)螺栓材料的允许剪应力是 150MN/m^2，试问螺栓内的剪应力是在允许极限以内吗？（假设螺栓无初应力）。

(*c*)车库的机匠把轮子装到上面所指的车子上去时，用一个大板手用力地拧紧这个螺帽，使得有 140MN/m^2 的拉应力加到螺栓上。这个拉应力就是螺栓中的初应力。现在，当用制动闸时，产生了上面计算的剪应力，螺栓仍然安全吗？为了回答这个问题，需要在拉伸与剪切联合作用的条件下计算螺栓内的最大剪应力；然后将它与允许剪应力进行比较。

答案 (a)1470N。(b)由于制动产生的剪应力＝18.71MN/m²。由于车重引起的剪应力＝12.47MN/m²。在最严重的位形中的剪应力＝31.8MN/m²。它小于允许的150MN/m²；所以螺栓是安全的。(c)由作莫尔圆或由方程(4.2-12)，τ_{max}＝76.63MN/m²，σ_{max}＝146.63MN/m²。显然，螺栓对剪切是安全的。但是，最好用手册检验一下拉应力，看看σ_{max}是否允许。

4.23 深海钻井平台的基础被施以静水压力 p，一个由平台重量引起的竖直方向附加应力 q 以及地震产生的剪应力 τ。求这三个主应力和最大剪切。

5 变形分析

施加于固体的力引起变形，施加于液体的力引起流动。分析的主要目的常常是寻求变形或流动。本章的目的就是按照一种适合于这些物体内应力状态的方法来分析固体的变形。

5.1 变 形

如果拉伸一个橡皮带，它会伸长；压缩一个圆柱体，它会缩短。如果弯曲一个杆，它会弯曲；扭转一个轴，它会产生扭转。拉伸应力引起拉伸应变，剪切应力引起剪应变，这是常识。要定量地表示这些现象，必须定义应变的度量。

考察一初始长度为 L_0 的弦。若将它拉伸到长度 L，如图 5.1(*a*)所示，那么自然会用诸如 L/L_0，$(L-L_0)/L_0$，$(L-L_0)/L$ 这样一些无因次比值来描述这个变化。采用了无因次比值，研究问题时就不必用绝对长度了。通常认为正是这些比值而不是长度 L_0 或 L 与弦中的应力有关。这个期望在实验室中可以得到证实。比值 L/L_0 称为拉伸比，用符号 λ 表示。比值

$$\varepsilon=\frac{L-L_0}{L_0},\varepsilon'=\frac{L-L_0}{L} \tag{5.1-1}$$

是应变度量，它们中的任何一个均可采用。尽管从数值上讲，它们是不一样的。例如，若 $L=2$，$L_0=1$，则有 $\lambda=2$，$\varepsilon=1$，$\varepsilon'=\frac{1}{2}$。我们将有理由(详见后)再引入应变度量

$$e=\frac{L^2-L_0^2}{2L^2},\epsilon=\frac{L^2-L_0^2}{2L_0^2} \tag{5.1-2}$$

若 $L=2$,$L_0=1$,则有 $e=\frac{3}{8}$,$\epsilon=\frac{3}{2}$。但是若 $L=1.01$,$L_0=1.00$,则 $e\approx0.01$,$\epsilon\approx0.01$,$\epsilon\approx0.01$,及 $\epsilon'\approx0.01$。因此在无限小伸长的情况下,所有上面指定的应变度量是近似相等的。然而,在有限伸长的情况下,它们是不同的。

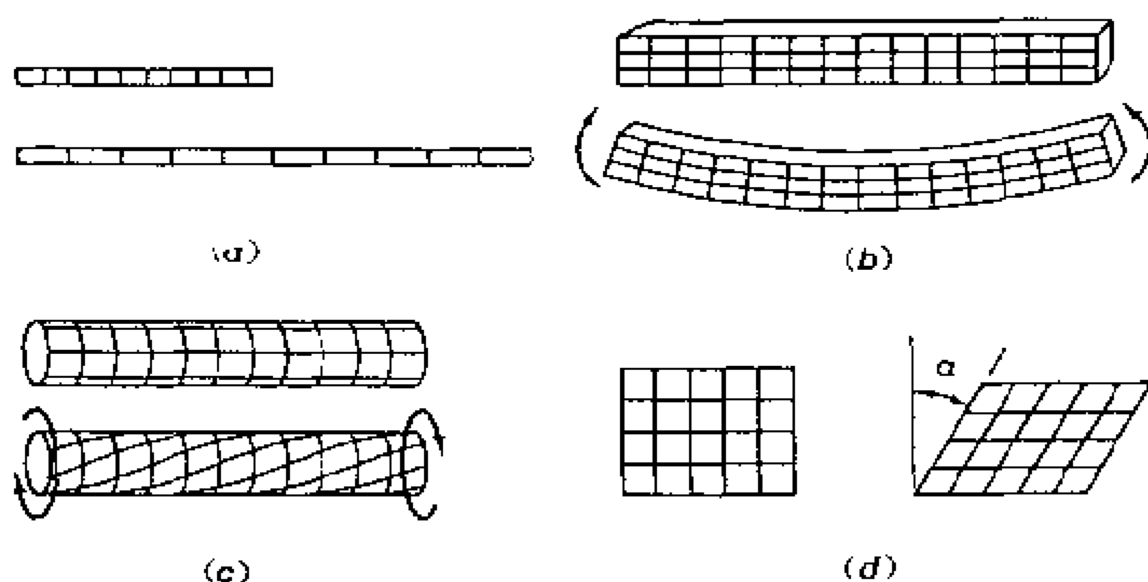


图 5.1　各种变形型式

(*a*)拉伸;(*b*)弯曲;(*c*)扭转;(*d*)简单剪切

这些应变度量可用来描述更复杂的变形。例如,若在图 5.1 所示的矩形梁的两端作用弯矩,梁将弯成一个圆弧。梁顶上的"纤维"将缩短;梁底部的"纤维"将伸长。这些纵向应变与作用在梁上的弯矩有关。

为了说明剪切,考察图 5.1(*c*)中所示的圆柱形轴。当轴受扭转时,轴中元素畸变成图 5.1(*d*)中所示的样子。在这种情况,可取角度 α 为应变度量。不过,更习惯用 $\tan\alpha$,或 $\frac{1}{2}\tan\alpha$ 作为剪应变;其理由将在后面阐明。

选择合宜的应变度量基本上是取决于应力-应变关系(即材料的本构方程)。例如,若拉伸一个弦,它伸长了。可以把实验结果表示为拉伸应力 σ 对拉伸比 λ,或对应变 e 的曲线。可以决定联系 σ

与 e 的经验公式。无限小应变的情况是很简单的，因为上述各种应变度量看来正好都一样。曾发现，对承受单向拉伸的无限小应变的大多数工程材料，类似于

$$\sigma = Ee \tag{5.1-3}$$

的关系在一定的应力范围内是有效的，其中 E 是常数，称为弹性模量。方程(5.1-3)称为虎克定律。遵循(5.1-3)的材料称为虎克材料。若 σ 小于一称之为拉伸屈服应力的范围，钢就是虎克材料。

相应于方程(5.1-3)，对于承受无限小剪应变的虎克材料的关系是

$$\tau = G\tan\alpha \tag{5.1-4}$$

其中 G 是称为剪切模量(刚性模量)的另一个常数。(5.1-4)式的有效范围也是以屈服应力为界，但这是以剪切为特征的。拉伸屈服应力、压缩屈服应力以及剪切屈服应力一般是不同的。

方程(5.1-3)和(5.1-4)是最简单的本构方程。最一般的情况将在第七、八与九章中讨论。

自然界和工程中大多数物体的变形，要比上面讨论的更复杂。因此需要一个一般性的处理方法。但首先让我们考虑变形的数学描述。

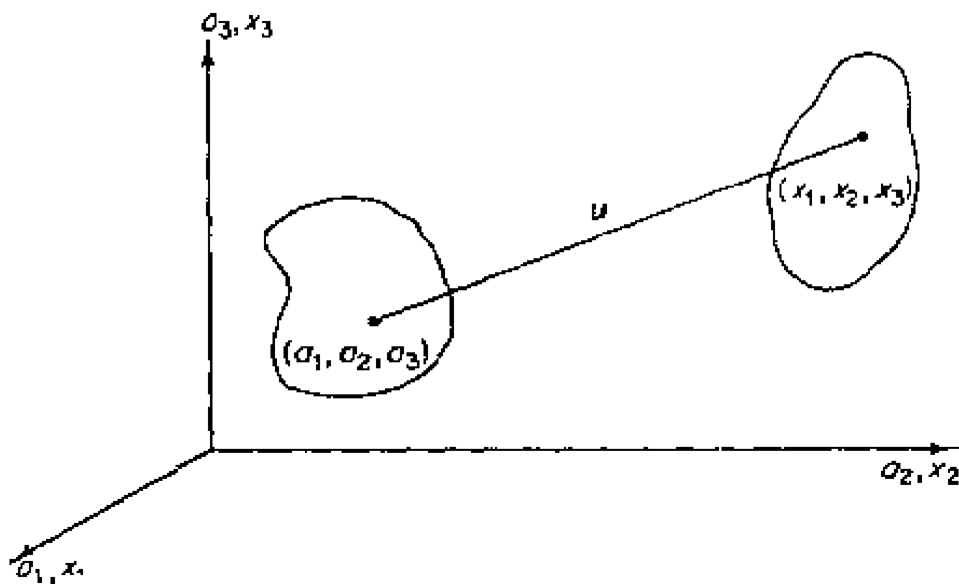


图 5.2 位移矢量

令一物体占有空间 S，参照直角笛卡儿参考标架，物体内每一个质点都有一组坐标。当物体变形时，每一个质点都占有一个新位置，它可用一组新坐标描述。例如，一个原来坐标为(a_1,a_2,a_3)的质点 P，当物体运动并且变形时，移动到具有坐标为(x_1,x_2,x_3)的 Q 处。因此，向量$\overrightarrow{PQ}$称为质点的位移向量，见图 5.2。位移向量的分量，显然为

$$x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3.$$

若已知物体内每一个质点的位移，则我们可以由原来的物体绘出变形体。因此，变形可以用位移场来描述。设变量(a_1,a_2,a_3)指的是物体原始位形中的任意质点，(x_1,x_2,x_3)为物体变形时该质点的坐标。因此，若 x_1,x_2,x_3 是 a_1,a_2,a_3 的已知函数，

$$x_i = x_i(a_1,a_2,a_3), \tag{5.1-5}$$

则物体的变形就可知道。这是从 a_1,a_2,a_3 到 x_1,x_2,x_3 的变换(映射)。在连续介质力学中，假设变形是连续的。一个点的邻域变换后仍是该点的邻域。我们还假设变换是一一对应的；即方程(5.1-5)中的函数，对物体中每一点都是单值、连续的，并具有唯一的逆

$$a_i = a_i(x_1,x_2,x_3). \tag{5.1-6}$$

因此，位移向量 $\boldsymbol{u}$ 由它的分量

$$u_i = x_i - a_i \tag{5.1-7}$$

所确定。

若使位移向量与初始位置的每一个质点相联系，就可写出

$$u_i(a_1,a_2,a_3) = x_i(a_1,a_2,a_3) - a_i. \tag{5.1-8}$$

若使位移与变形后位置的质点相联系，我们写出

$$u_i(x_1,x_2,x_3) = x_i - a_i(x_1,x_2,x_3). \tag{5.1-9}$$

习题　为了使变换(5.1-5)单值，连续，可微，试问函数 $x_i(a_1,a_2,a_3)$必须满足什么条件？

注　若变换是单值，连续，可微的，则函数 $x_i(a_1,a_2,a_3)$必须是单值，连续，可微的，且在物体占据的空间内，雅可比行列式$|\partial x_i/\partial a_j|$必须不为零。其中最后一点也是非常重要的。(见 2.5 节)

5.2 应 变

关于物体中应力与应变有联系这一思想，首先是由虎克(Robert Hooke，1635～1703 年)早在 1676 年以字谜 *ceiiino ssst-tuv* 的形式宣布的。在 1678 年，他把字谜解释为

Ut tensio sic vis，

或"任何弹性体的力量与伸长成同样的比例"。任何一个曾经使用过弹簧或拉伸过一个橡皮带的人，都很清楚这个意思。

刚体运动不引起应力，这样，位移本身就不直接与应力相关。要使变形与应力发生关系，就必须考察物体的拉伸和畸变。为此目的，让我们考虑物体中的三个相邻点 P，P'，P''(见图 5.3)。将它们变换到变形后位形中的点 Q，Q'，Q''，倘若我们知道边长变化的话，就可以完全确定三角形面积与角度的变化。但是边的变化确定不了三角形的"位置"。类似地，若已知物体内两个任意点之间长度的变化，则除了物体在空间的位置以外，物体的新位形将完全被确定。描述物体内任意两点间距离的变化是变形分析的关键。

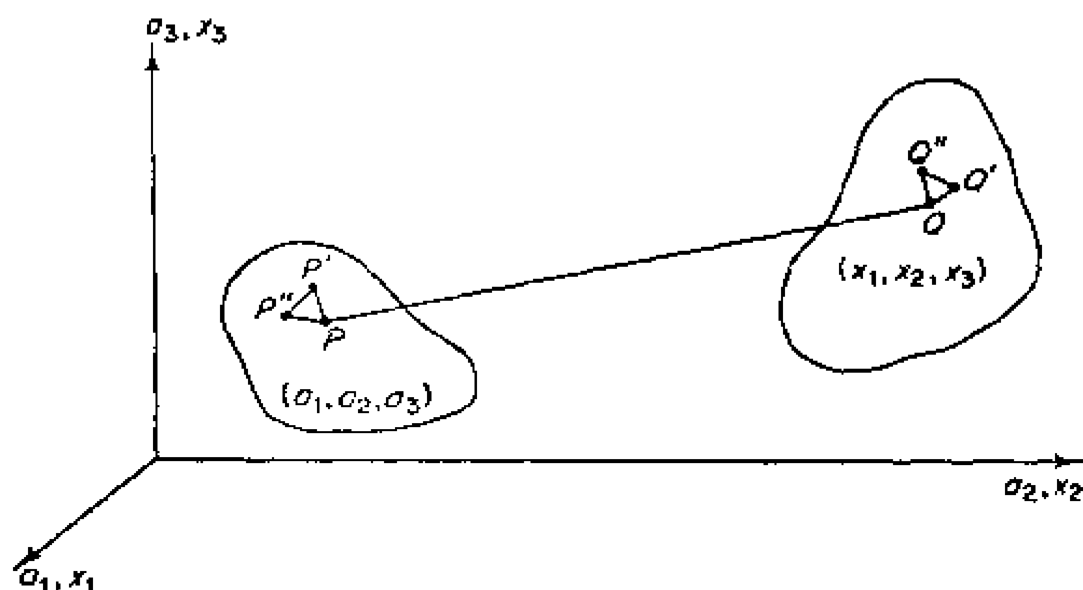


图 5.3 物体的变形

考察连接点 $P(a_1, a_2, a_3)$ 与邻点 $P'(a_1 + da_1, a_2 + da_2,$

a_3+da_3)的一无限小线元素。在初始位形中PP'的长度ds_0的平方为

$$ds_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2. \tag{5.2-1}$$

当点P与P'分别变形到点$Q(x_1, x_2, x_3)$与$Q'(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$时，新元素$QQ'$的长度的平方为

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{5.2-2}$$

由方程(5.1-5)与(5.1-6)有

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j, \quad da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j. \tag{5.2-3}$$

因此，在引入克罗内克符号后，就可以写出

$$ds_0^2 = \delta_{ij} da_i da_j = \delta_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial a_j}{\partial x_m} dx_l dx_m, \tag{5.2-4}$$

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da_l da_m. \tag{5.2-5}$$

在对符号中的哑指标作了一些改变后，就可以将元素长度平方之间的差写为

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) da_i da_j, \tag{5.2-6}$$

或者写为

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j, \tag{5.2-7}$$

我们定义**应变张量**

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right), \tag{5.2-8}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right), \tag{5.2-9}$$

所以

$$ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij} da_i da_j, \tag{5.2-10}$$

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j. \tag{5.2-11}$$

应变张量E_{ij}**是格林**(英)**和圣·维南**(St.-Venant)**引入的，称为格林应变张量**。**应变张量**e_{ij}**是柯西**(Cauchy)**对无限小应变及艾**

尔门西(Almansi)与海麦尔(Hamel)对有限应变引入的，称为艾尔门西应变张量。与流体力学中术语相似，E_{ij}常称为拉格朗日(Lagrange)应变张量，e_{ij}常称为欧拉应变张量。

这样定义的 E_{ij}与 e_{ij}分别是在坐标系 a_i 与 x_i 内的张量，这是将商规则用于方程(5.2-10)与(5.2-11)所得的结果。显然，张量 E_{ij}与 e_{ij}是对称的；即

$$E_{ij} = E_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}. \tag{5.2-12}$$

方程(5.2-10)与(5.2-11)的一个直接结果是 $ds^2 - ds_0^2 = 0$，它意味着 $E_{ij} = e_{ij} = 0$，反之亦然。但是每个线元素长度保持不变的变形是刚体运动。因此，物体变形为刚体运动的必要与充分条件是，在整个物体内部应变张量 E_{ij}或 e_{ij}的所有分量为零。

5.3 通过位移来表示的应变分量

如果引入位移向量 u，其分量为

$$u_\alpha = x_\alpha - a_\alpha, (\alpha = 1,2,3) \tag{5.3-1}$$

则

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}, \quad \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} = \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}, \tag{5.3-2}$$

应变张量化为简单的形式

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}\right)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial a_j} + \delta_{\beta j}\right) - \delta_{ij}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j}\right] \end{aligned} \tag{5.3-3}$$

和

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\left(-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i}\right)\left(-\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + \delta_{\beta j}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\right]. \end{aligned} \tag{5.3-4}$$

用非节略的符号(x, y, z 代 x_1, x_2, x_3；a, b, c 代 a_1, a_2, a_3)则有典型项

$$
\begin{aligned}
E_{aa} &= \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right], \\
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\
E_{ab} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial w}{\partial b}\right)\right], \\
e_{xy} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{5.3-5}
$$

注意，当计算拉格朗日应变张量时，u,v,w 被看作是处于无应变位形时物体内点位置 a,b,c 的函数；而当计算欧拉应变张量时，u,v,w 被看作是处于有应变位形时的物体内点位置 x,y,z 的函数。

如果位移分量 u_i 的一阶导数很小，以致 u_i 的偏导数的平方和乘积均可以略去，则 e_{ij} 就简化为柯西无限小应变张量

$$
e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \tag{5.3-6}
$$

用非节略符号表示，即

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = e_{yx}, \\
e_{yy} &= \frac{\partial u}{\partial y}, e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = e_{zx}, \\
e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = e_{zy}.
\end{aligned}
\tag{5.3-7}
$$

在无限小位移情况，拉格朗日应变张量与欧拉应变张量之间的差别消失了，之后按变形前还是按变形后点的位置来计算位移导数均可。

注意：剪应变的符号

在大多数书籍与文章中，应变分量定义为

$$
\begin{aligned}
e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{xy} = 2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
e_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{yz} = 2e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
e_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{zx} = 2e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

换句话说，用 $\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{xz}$表示的剪应变分别是分量 e_{xy},e_{yz},e_{zx}的两倍。我们将不用 $\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$，因为分量 e_{xy},γ_{xy}等放在一起不能形成一个张量，这在数学上很不方便。但是，当你看其他书籍和文章时，要当心这个差别。

5.4 无限小应变分量的几何解释

令 x,y,z 是一组直角笛卡儿坐标。考察一个平行于 x 轴，长度为 $\mathrm{d}x$ 的线元素($\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0$)。由于变形所引起的这个元素长度平方的变化为

$$\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}s_0^2=2e_{xx}(\mathrm{d}x)^2$$

因此

$$\mathrm{d}s-\mathrm{d}s_0=\frac{2e_{xx}(\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}s+\mathrm{d}s_0}.$$

但是，在这种情况下，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$。并且假设位移 u,v,w 以及应变分量 e_{ij}是无限小量的话，$\mathrm{d}s_0$ 与 $\mathrm{d}s$ 仅差一个二阶小量。因此，

$$\frac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}s}=e_{xx}, \tag{5.4-1}$$

可以看出，e_{xx}代表相对伸长，或代表平行于 x 轴的单位长度向量的长度变化。在图 5.4 的情况 1 中，说明了以上讨论对体积元素的应用。

为了明瞭分量 e_{xy}的意义，我们考察物体内一个边长为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 的微矩形。从图 5.4 的情况 2，3 与 4 可以明显地看出，和式$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$代表了原来为直角的 xoy 角的变化。于是

$$\begin{aligned}e_{xy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (5.4\text{-}2)\\&=\frac{1}{2}\tan(\text{角 } xoy \text{ 的变化}).\end{aligned}$$

在工程应用中，应变分量 $e_{ij}(i\neq j)$的一倍，即 $2e_{ij}$，称为剪应变

或剪切滑移。图 5.4 的情况 3 对于理解这个名词是特别有帮助的，这种情况称为简单剪切。

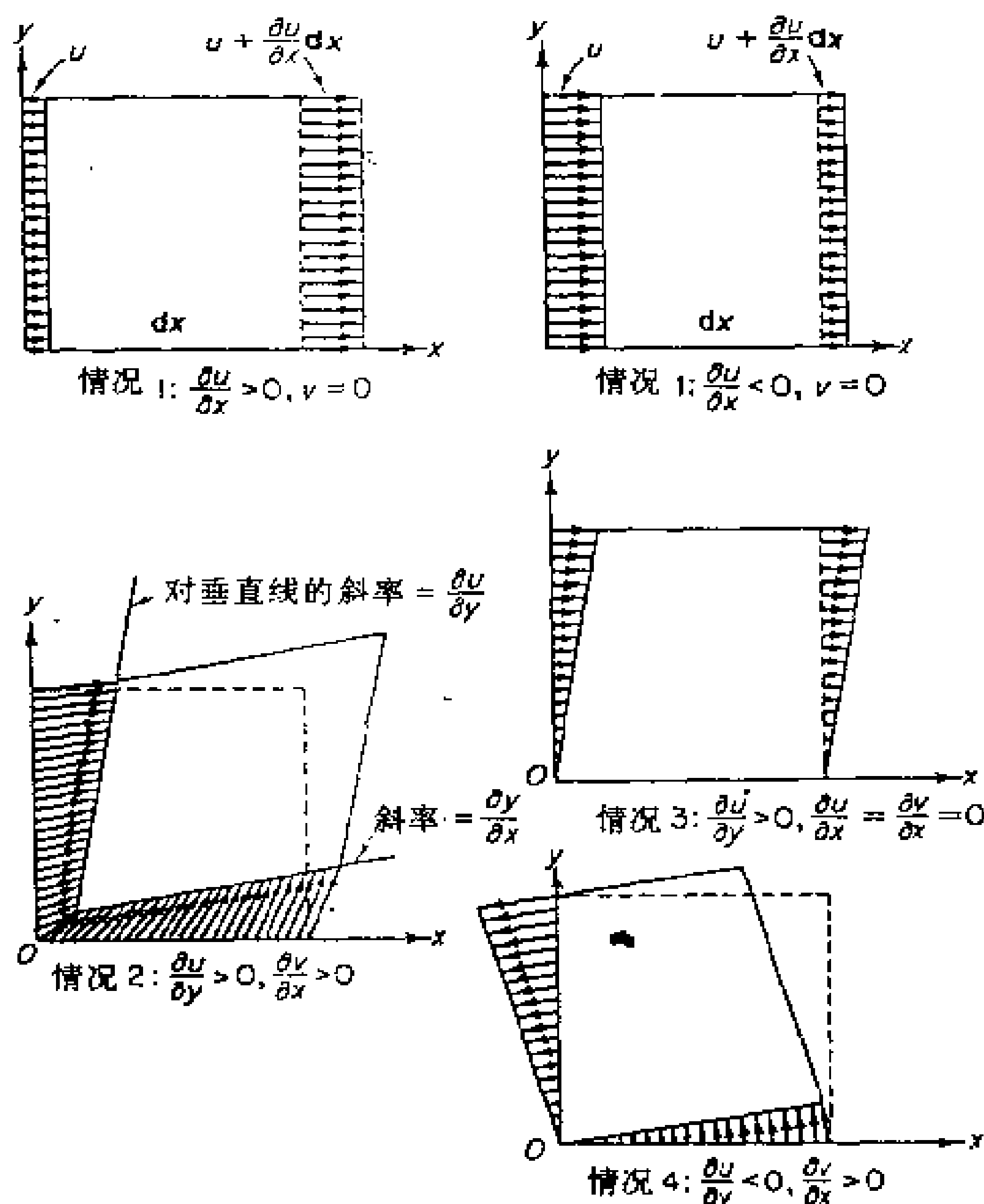


图 5.4 变形梯度和无限小应变分量的解释

5.5 无限小旋转

考察一无限小位移场 $u_i(x_1, x_2, x_3)$。由 u_i 形成笛卡儿张量

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \tag{5.5-1}$$

它是反对称的，即

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}. \tag{5.5-2}$$

由于 $\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}$ 为零，因此张量 ω_{ij} 仅有三个独立的分量 ω_{12}, ω_{23} 与 ω_{31}。我们总是能够用这样一个反对称张量构成一个对偶向量

$$\omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\omega_{ij}, \tag{5.5-3}$$

其中 ϵ_{kij} 是排列符号(见 2.3 节)。另一方面，从关系(5.5-3)与 $\epsilon-\delta$ 恒等式，方程(2.3-9)，得出 $\epsilon_{ijk}\omega_k = \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji})$，根据方程(5.5-2)，它等于 ω_{ij}。因此

$$\omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k. \tag{5.5-4}$$

于是，ω_{ij} 就称为向量 ω_k 的对偶(反对称)张量。我们将分别称 ω_k 与 ω_{ij} 为位移场 u_i 的旋转向量和旋转张量。

将 5.2 节末尾给出的证明稍加修正即可得出，对称应变张量 E_{ij} 或 e_{ij} 为零是质点邻域处为刚体运动的必要与充分条件。一个刚体运动包含平移与旋转。平移是 u_i。旋转是什么？我们将证明，在点 P 处应变张量为零的无限小位移场中，P 的邻域的旋转由向量 ω_i 给出。为了证明这点，考察 P 的邻域中的一点 P'。令 P 与 P' 的坐标分别为 x_i 与 $x_i + dx_i$。P' 相对于 P 的位移是

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j. \tag{5.5-5}$$

这式可以写为

$$du_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j.$$

第一个括号内的量是无限小应变张量，由假设它等于零。第二个括号内的量与方程(5.5-1)相同。因此，

$$\begin{aligned} du_i &= -\omega_{ij}dx_j = \omega_{ji}dx_j \qquad (5.5\text{-}6)\\ &= -\epsilon_{ijk}\omega_k dx_j \text{〔由方程(5.5-4)〕}\\ &= (\boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{x})_i \text{(由定义)} \end{aligned}$$

于是，相对位移是 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $d\boldsymbol{x}$ 的向量积。这正好是由一个围绕经过 P 点的轴，在 $\boldsymbol{\omega}$ 方向旋转无限小转角 $|\boldsymbol{\omega}|$ 所引起的位移。

应该注意，我们的讨论限于无限小的角位移。对于有限位移情况，角的度量与 ω_{ij} 的关系更复杂些。

5.6　有限应变分量

当应变分量不是小量的时候，对应变张量的分量也很容易给出简单的几何解释。

考察一组直角笛卡儿坐标。5.2 节的应变分量就是对这种坐标系定义的。令变形前的线元素是 $\mathbf{d}a$，其分量为 $da_1=ds_0, da_2=0, da_3=0$。将这个元素的伸长 E_1 用

$$E_1 = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \tag{5.6-1}$$

定义，或

$$ds = (1 + E_1)ds_0. \tag{5.6-2}$$

从方程(5.2-10)，有

$$ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij}da_i da_j = 2E_{11}(da_1)^2, \tag{5.6-3}$$

将(5.6-2)与(5.6-3)合并，得

$$(1 + E_1)^2 - 1 = 2E_{11} \tag{5.6-4}$$

它给出了用 E_1 表示的 E_{11} 的意义。反之

$$E_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1. \tag{5.6-5}$$

当 E_{11} 远小 1 时，这式化为

$$E_1 \approx E_{11}. \tag{5.6-6}$$

为了得到 E_{12} 的物理意义，我们考察两个线元素 ds_0 与 $d\bar{s}_0$，它们在初始状态中是成直角的。

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}s_0, da_1 = ds_0, da_2 = 0, da_3 = 0, \\ &\mathbf{d}\bar{s}_0, da_1 = 0, da_2 = d\bar{s}_0, da_3 = 0. \end{aligned} \tag{5.6-7}$$

变形后，这些线元素变为 $\mathbf{d}s$，(dx_i) 与 $\mathbf{d}\bar{s}(d\bar{x}_i)$。构成变形后元素的数量积，得到

$$ds d\bar{s}\cos\theta = dx_k d\bar{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} da_i \frac{\partial x_k}{\partial a_j} d\bar{a}_j$$

$$= \frac{\partial x_k}{\partial a_1} \frac{\partial x_k}{\partial a_2} \mathrm{d}s_0 \mathrm{d}\bar{s}_0.$$

但是根据定义(5.2-8)，又因 $\delta_{12}=0$，故有

$$E_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial x_k}{\partial a_1} \frac{\partial x_k}{\partial a_2}.$$

因此

$$\mathrm{d}s\mathrm{d}\bar{s}\cos\theta = 2E_{12}\mathrm{d}s_0\mathrm{d}\bar{s}_0 \tag{5.6-8}$$

但是，从方程(5.6-1)与(5.6-5)，有

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + 2E_{11}}\mathrm{d}s_0, \quad \mathrm{d}\bar{s} = \sqrt{1 + 2E_{22}}\mathrm{d}\bar{s}_0.$$

因此，方程(5.6-8)给出

$$\cos\theta = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{22}}}. \tag{5.6-9}$$

角度 θ 是变形后线元素 $\mathrm{d}s$ 与 $\mathrm{d}\bar{s}$ 之间的夹角。在初始状态中为正交的两个线元素之间的角度变化是 $\alpha_{12}=\pi/2-\theta$。因此，从方程(5.6-9)得到

$$\sin\alpha_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{22}}}. \tag{5.6-10}$$

这些方程显示了 E_{12} 与角度 θ 和 α_{12} 的关系。由于在这些方程中涉及到 E_{11} 与 E_{22}，所以解释就不像在无限小情况中那样简单。

对于欧拉应变分量，可以完全类似地加以解释。定义每单位变形长度的伸长为

$$e_1 = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}s}, \tag{5.6-11}$$

我们求得

$$e_1 = 1 - \sqrt{1 - 2e_{11}}. \tag{5.6-12}$$

另外，如果用 β_{12} 表示变形后变为正交的两个元素在初始状态中的夹角对直角的偏离，则有

$$\sin\beta_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1 - 2e_{11}}\sqrt{1 - 2e_{22}}}, \tag{5.6-13}$$

在无限小应变的情况，方程(5.6-10)与(5.6-13)化为大家所熟悉的结果

$$e_1 \approx e_{11}, E_1 \approx E_{11}, \alpha_{12} \approx 2E_{12}, \beta_{12} \approx 2e_{12}. \qquad (5.6\text{-}14)$$

5.7 主应变、莫尔圆

可以毫不费力地把 4.1 节到 4.8 节的结果推广到应变，因为这些特性是由所涉及的张量是对称张量这一简单事实所导出的。我们必须做的只是将应力这个词换为应变。于是

(*a*)存在三个主应变 e_1, e_2, e_3，它们是行列式

$$|e_{ij} - e\delta_{ij}| = 0, \qquad (5.7\text{-}1)$$

的根。三次方程(5.7-1)的根均是实数。

(*b*)伴随每一个主应变，譬如说 e_1，存在一个主轴，其方向余弦为 $\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \nu_3^{(1)}$，它们是方程组

$$(e_{ij} - e_1\delta_{ij})\nu_j^{(1)} = 0, (i = 1,2,3) \qquad (5.7\text{-}2)$$

的解。三组解$(\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \nu_3^{(1)})$，$(\nu_1^{(2)}, \nu_2^{(2)}, \nu_3^{(2)})$，$(\nu_1^{(3)}, \nu_2^{(3)}, \nu_3^{(3)})$是三个单位向量的分量。若方程(5.7-1)的根 e_1, e_2, e_3 不同($e_1 \neq e_2 \neq e_3$)，则三个主轴彼此正交。若两个主应变相同，则方程(5.7-2)有无穷多个解，从无穷多个解中可选出无穷多对正交向量作为主轴。若所有三个根都相同，则任何一组三个互相正交的单位向量都可以看作是主轴。

(*c*)垂直于主轴的平面称为主平面。

(*d*)若坐标轴 x_1, x_2, x_3 与主轴一致，则应变张量表示为其标准形

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

(*e*)可以定义一个应变偏量张量 $e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{\alpha\alpha}\delta_{ij}$。张量 e_{ij} 与 e'_{ij} 具有如下独立的应变不变量

$$
\begin{aligned}
I_1 &= e_{ij}\delta_{ij}, & J_1 &= e'_{ij}\delta_{ij} = 0, \\
I_2 &= \frac{1}{2}e_{ik}e_{ik}, & J_2 &= \frac{1}{2}e'_{ik}e'_{ik}, \\
I_3 &= \frac{1}{3}e_{ik}e_{km}e_{mi}. & J_3 &= \frac{1}{3}e'_{ik}e'_{km}e'_{mi}.
\end{aligned}
\tag{5.7-3}
$$

(f)莫尔圆可用于应变的图解分析，拉梅椭球对应变是适用的。

5.8 极坐标中的无限小应变分量

如同在 3.6 节中指出的那样，往常希望引入曲线坐标作为参考。应变分量可以参照在曲线坐标方向定位的局部直角参考标架。例如，在极坐标 γ,θ,z 中，可以把应变分量指定为 $e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{zz}, e_{r\theta}, e_{rz}, e_{z\theta}$，如同在应力情况中一样，通过张量变换规律可以把它们与 $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ 联系起来，见 3.6 节。

然而，如果将位移向量在曲线坐标方向分解成分量，应变-位移关系包含了位移分量的导数，因此，它就受坐标系曲率的影响。应变-位移关系可以表现得与直角坐标中对应的公式完全不一样。

普遍的张量分析理论确实是一种处理曲线坐标的普遍方法。读者可以去参考更高级的专著。在作者的固体力学基础（Y·C·Fung, 1965）一书中给出了一个导论。在本书中，因为限于笛卡儿张量，所以必须在一种特殊的状态下来处理每一组曲线坐标。

下面将说明在柱极坐标情况中的两种特殊方法：坐标变换法和详细推导法。前者将在本节讨论，后者将在 5.9 节讨论。

在第一种方法中，我们从极坐标 r,θ,z 和直角坐标 x,y,z 之间的关系出发

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}, \\ r^2 = x^2 + y^2, \end{cases} \quad z = z. \tag{5.8-1}
$$

$$
\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta, \tag{5.8-2}
$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r},\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}. \qquad (5.8\text{-}3)$$

由此可见，在笛卡儿方程中相对于 x 和 y 的任何导数均可借助

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.\end{aligned} \qquad (5.8\text{-}4)$$

变换为对 r 和 θ 的导数。现在，在极坐标中，我们用如图 5.5 中所示的 u_r、u_θ、u_z 来表示位移向量 $\boldsymbol{u}$ 的分量。同一向量 $\boldsymbol{u}$ 分解到直角坐标方向上的分量是 u_x，u_y、u_z。从图 5.5 可以看出，这些位移是用方程

$$\begin{aligned}u_x&=u_r\cos\theta-u_\theta\sin\theta,\\ u_y&=u_r\sin\theta+u_\theta\cos\theta\\ u_z&=u_z\end{aligned} \qquad (5.8\text{-}5)$$

相联系的。

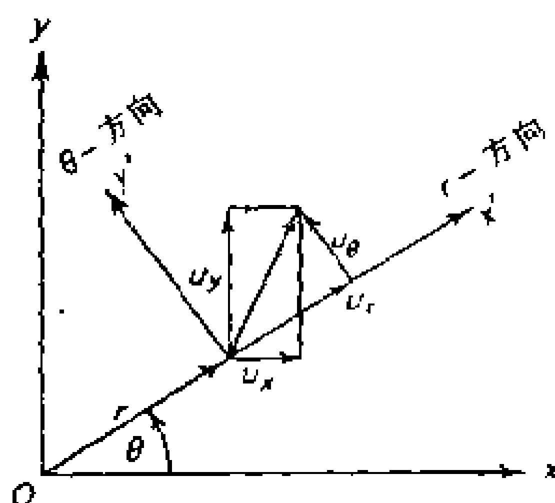


图 5.5　极坐标中的位移向量

极坐标中的应变分量指定为

$$\begin{vmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz}\\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z}\\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz}\end{vmatrix} \qquad (5.8\text{-}6)$$

实际上，它们是参考于局部直角坐标系 $x'y'z'$ 的应变分量，x' 与 r 同向，y' 与 θ 同向，z' 与 z 同向。两组坐标间的方向余弦是

	x	y	z
r 或 x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
θ 或 y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
z 或 z'	0	0	1

(5.8-7)

这时张量变换规律有效，故有

$$
\begin{aligned}
e_{rr} &= e_{xx}\cos^2\theta + e_{yy}\sin^2\theta + e_{xy}\sin 2\theta,\\
e_{\theta\theta} &= e_{xx}\sin^2\theta + e_{yy}\cos^2\theta - e_{xy}\sin 2\theta,\\
e_{r\theta} &= (e_{yy} - e_{xx})\cos\theta\sin\theta + e_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta),\\
e_{zr} &= - e_{zx}\cos\theta + e_{zy}\sin\theta,\\
e_{z\theta} &= - e_{zx}\sin\theta + e_{zy}\cos\theta,\\
e_{zz} &= e_{zz}.
\end{aligned}
\tag{5.8-8}
$$

最后，有

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\
e_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\
e_{zx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\tag{5.8-9}
$$

现将(5.8-4)与(5.8-3)代入(5.8-9)，得到

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin^2\theta\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\\
&\quad - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
e_{yy} &= \sin^2\theta\frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2\theta\left(\frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}\right)\\
&\quad + \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
e_{xy} &= \frac{\sin 2\theta}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} - \frac{u_r}{r}\right)\\
&\quad + \frac{\cos 2\theta}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right).
\end{aligned}
\tag{5.8-10}
$$

将这些方程以及类似的结果代入(5.8-8)，化简，就得到

$$
e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},
$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta},$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \tag{5.8-11}$$

$$e_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

$$e_{z\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right),$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

这样，我们就看到了，尽管坐标变换方式很冗长，但是却是直截了当的。注意到方程(5.8-11)与(5.8-9)的结构是不同的。用张量分析的术语来讲，差别是由于坐标系的基本度量张量的差异所引起的。

应该再次提醒读者，对应变我们采用的是张量符号，所以剪应变分量 $e_{r\theta}, e_{rz}, e_{z\theta}$ 是大多数书籍中通常给出的 $\gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\theta}$ 的一半。

5.9 极坐标中应变位移关系的直接推导

前一节的结果可以从无限小应变分量的几何定义直接推导出来。我们记得正应变分量的意义是每单位长度上长度变化的比值，而剪应变分量的意义是直角变化的一半。对于无限小位移，可以从图 5.6 所示的图形中直接看出这些变化。

首先考察 r 方向的位移 u_r。我们从图 5.6(a)看到

$$e_{rr} = \frac{u_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\mathrm{d}r - u_r}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \tag{5.9-1}$$

从同一个图上还看出，一个周向元素的径向位移会引起该元素的伸长，因之在 θ 方向引起应变。原来长度为 $r\mathrm{d}\theta$ 的元素 ab 移到 $a'b'$，长度变为 $(r+u_r)\mathrm{d}\theta$。因此，由于这个径向位移所引起的切向应变是

$$e_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{(r + u_r)\mathrm{d}\theta - r\mathrm{d}\theta}{r\mathrm{d}\theta} = \frac{u_r}{r}. \tag{5.9-2}$$

另一方面，如图 5.6(b)所示，切向位移 u_θ 产生的切向应变等于

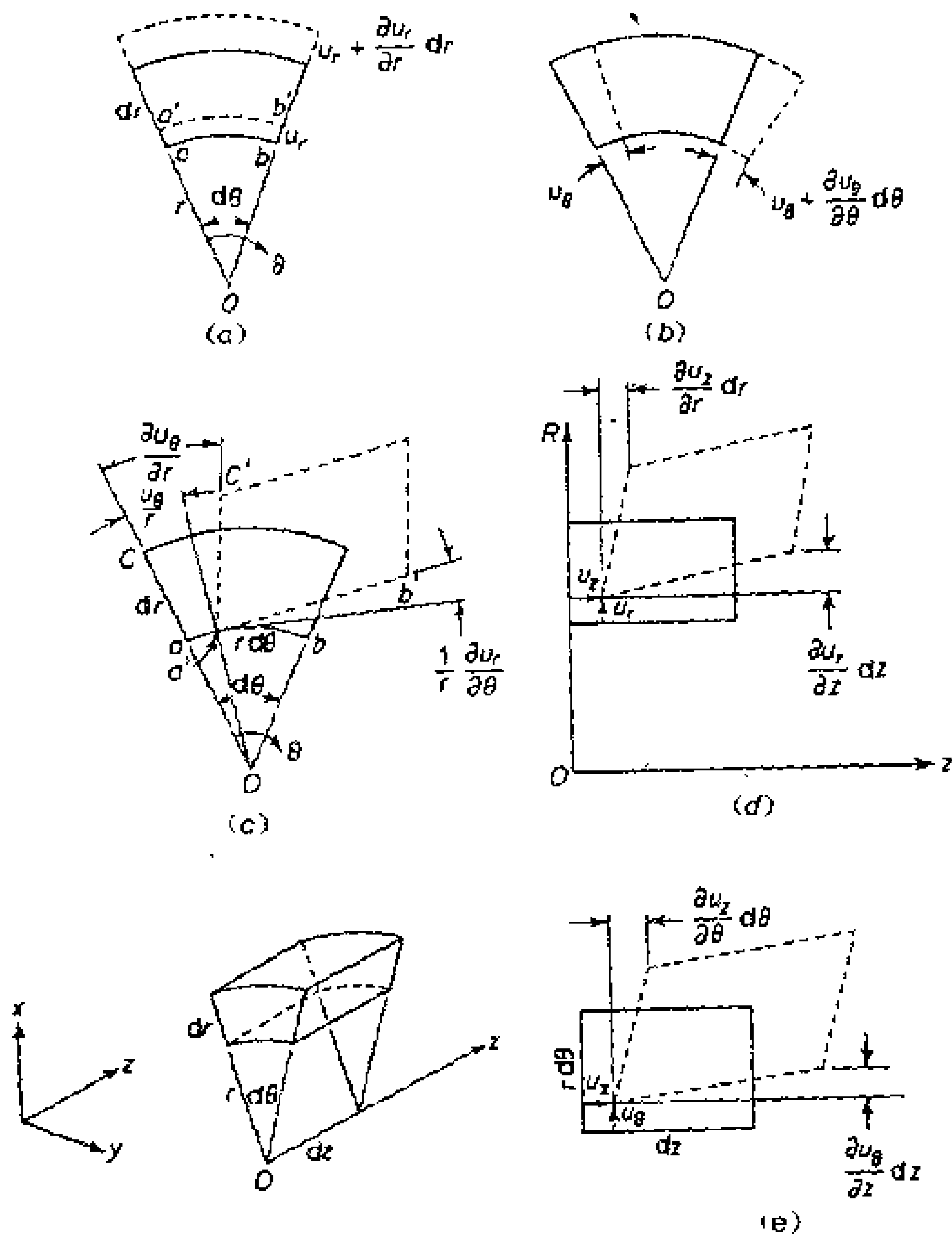


图 5.6 柱极坐标中的位移

（取自 E.E Sechler，John Wiley 和 Sous《工程中的弹性力学》，1952，纽约）
物质-无限小单元的自由体图和画在图下角的两组坐标系统。

(a)径向位移变化产生的径向应变；(b)由于周向位移变化而造成的周向应变；(c)因 $\frac{\partial u_\theta}{\partial r}$ 和 $\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$ 造成的剪应变 $e_{r\theta}$；(d)因 $\frac{\partial u_z}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial u_r}{\partial z}$ 造成的剪应变 e_{rz}；(e) $\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial u_\theta}{\partial z}$ 造成的剪应变 $e_{z\theta}$

$$e_{\theta\theta}^{(2)}=\frac{u_\theta+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\theta-u_\theta}{r\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}.\tag{5.9-3}$$

总切向应变 $e_{\theta\theta}$是和式

$$e_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}.\tag{5.9-4}$$

轴向正应变同直角坐标情况一样，是

$$e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\tag{5.9-5}$$

剪应变 $e_{r\theta}$等于角度变化$\angle c'a'b'-\angle cab$ 的一半，如图 5.6(c)所示。直接检验一下图就可证明

$$e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right).\tag{5.9-6}$$

第一项来自径向位移在 θ 方向的变化；第二项来自切向位移在径向的变化；由于线 $a'c'$的斜率变化部分来自元素绕通过 0 点轴的刚体旋转，所以出现最后一项。

参照图 5.6(d)与(e)可以推导出其余两个应变分量 $e_{z\theta}$，e_{zr}。

$$\begin{aligned}e_{z\theta}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\theta}{r\mathrm{d}\theta}+\frac{\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}\right].\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right).\end{aligned}\tag{5.9-7}$$

和

$$\begin{aligned}e_{zr}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}+\frac{\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\end{aligned}\tag{5.9-8}$$

自然，这些方程与方程(5.8-11)是一样的。的确，直接的几何推导方法比前一节的代数方法的概念更清楚些。

5.10 其他应变度量

我们一定不要认为上面所定义的应变张量是唯一适合于描述变形的应变度量。当我们把变形分析建立在任意两个质点间距离平方的变化的基础之上时，它们是最自然的一种(5.2 节)。距离的平方是一个方便的出发点，因为从毕达哥拉斯(Pythagoras)定理[①]知道，直角三角形斜边的平方等于直角边平方的和。利用毕达哥拉斯定理，我们指出在直角笛卡儿参考标架中具有坐标为 x_i 和 x_i+dx_i 的两点间距离的平方是

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

在 5.2 节，把分析建立在这个方程的基础之上；结果是应变张量的自然定义。

变形不一定非用这个方法来描述。例如，可以坚持采用距离 ds(代替 ds^2)的改变来作为我们的出发点，或者采用位移场的九个一阶导数集

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{5.10-1}$$

作为我们的出发点。的确，这些称之为"变形梯度"的导数是十分方便的。我们可以将矩阵($\partial u_i/\partial x_j$)分解为对称部分和反对称部分之和

① 即勾股定理，或商高定理。——译者

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z}
\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0
\end{bmatrix}
\tag{5.10-2}
$$

因此，变形梯度矩阵的对称部分显然是 5.3 节中所定义的无限小应变矩阵。

其他著名的应变度量是柯西应变张量与芬格尔(Finger)应变张量。当用方程(5.1-5)与(5.1-6)给出映射时，柯西应变张量是

$$
C_{ij}=\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}, \quad \overline{C_{ij}^{-}}=\frac{\partial x_k}{\partial a_i}\frac{\partial x_k}{\partial a_j}, \tag{5.10-3}
$$

而芬格尔应变张量是

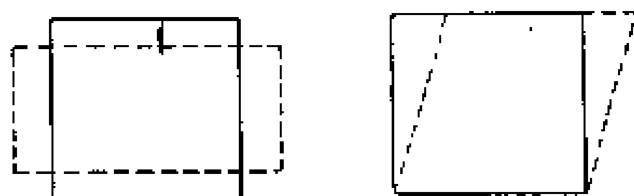
$$
B_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\frac{\partial x_j}{\partial a_k}, \quad \overline{B_{ij}^{-}}=\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\frac{\partial a_j}{\partial x_k}. \tag{5.10-4}
$$

对这些张量，无(零)应变不是由 C_{ij} 或 B_{ij} 等于零，而是由 $C_{ij}=\delta_{ij}$，$B_{ij}=\delta_{ij}$ 来表示的。

我们不再进一步地讨论这些应变度量，只是要注意到，它们可能适合于高等连续介质力学理论中的某些特殊需要。

习 题 5

5.1 一段血管是不可压缩的，即其体积不变。在正常条件下，血管可看作一圆柱体管。设某人由于某种原因血压增加，血管内径从 a 变为 $a+\Delta a$，而轴向长度不变；计算血管由血压增加引起的周向和径向应变。



纯剪切　　简单剪切

$(k>1)$　　$(s>0)$

图 $P5.2$　纯剪切与简单剪切

5.2　(a)位移场 u_i 是坐标 x_i 的线性函数的变形状态，称为"均匀变形"。曲面经过均匀变形后变成一个球 $x^2+y^2+z^2=r^2$，试问曲面方程是什么？〔采用 $f(x,y,z)=0$ 型的方程，其中 x,y,z 是直角笛卡儿坐标。〕

(b)作为均匀变形的特例，考察下面从 (x,y,z) 到 (x',y',z') 的线性坐标变换，它们都是参照相同的笛卡儿参考标架，图 $P5.2$。

(1)纯剪切：$x'=kx, y'=k^{-1}x, z'=z$.

(2)简单剪切：$x'=x+2sy, y'=y, z'=z$.

可以把 (x,y,z) 看作是物体在变形以前的一个质点的坐标，而 (x', y', z') 则是变形以后该质点的坐标。试证明，若 $s=\frac{1}{2}(k-k^{-1})$，则纯剪切可以认为是相对于两个轴的简单剪切，这两个轴与 Ox, Oy 轴倾斜是 $\tan^{-1}(k^{-1})$。等价地，一个简单剪切可以认为是具有 $k=\sqrt{(s^2+1)}+s$，且应变椭球长轴与 Ox 倾斜 $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\tan^{-1}s=\tan^{-1}(k^{-1})$ 的纯剪切。

(这两种情况的应变椭球图形可在杰格尔(J. C. Jaeger)：*Elasticity, Fracture and Flow*; London; Methuen & Co., 1956，第 32 页中找到)。

解　我们把"均匀变形"定义为这样的一种变形，即其中位移场 u_i 是坐标的线性函数，使得经过变换

$$x'_i = x_i + u_i = x_i + u_i^{(0)} + a_{ik}x_k \tag{1}$$

后，点 x_i 移到 x'_i。其中 $u_i^{(0)}$ 与 a_{ik} 是常数。在这个变换条件下，一个球 $x'^2+y'^2+z'^2=r^2$ 对应于一个椭球

$$[u_i^{(0)} + x_i + a_{ik}x_k][u_i^{(0)} + x_i + a_{ij}x_j] = r^2 \tag{2}$$

现在，纯剪切与简单剪切可用下面方程来定义，并且对于方形可以用图形来代表，如图 $P5.2$ 所示。

纯剪切：

$$x' = kx, y' = y/k, z' = z. \tag{3}$$

简单剪切：

$$x' = x + 2sy, y' = y, z' = z \tag{4}$$

两种变换在图中表现得完全不同。但是事实上，它们是相似的。相似性最好是通过考察应变椭球的办法来证明。

因为 $z'=z$，所以考察 $x-y$ 平面内曲线的变换就足够了。由方程(3)，圆 $x'^2+y'^2=1$ 变换为椭圆：

$$k^2x^2 + \frac{y^2}{k^2} = 1; \tag{5}$$

而由方程(4)，同一个圆则变换为另一个椭圆：

$$x^2 + 4sxy + (1 + 4s^2)y^2 = 1. \tag{6}$$

让我们借助于坐标旋转来简化方程(6)。若 x、y 转过角度 θ 到 ξ，η，则方程(2.4-2)有

$$x = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta \tag{7}$$

将这些代入方程(6)，并简化，就得到

$$\xi^2[\cos^2\theta + 4s\cos\theta\sin\theta + (1 + 4s^2)\sin^2\theta] + \eta^2[\sin^2\theta - 4s\sin\theta\cos\theta + (1 + 4s^2)\cos^2\theta] + \xi\eta[-2\cos\theta\sin\theta + 4s(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\cos\theta\sin\theta(1 + 4s^2)] = 1. \tag{8}$$

若 $s=-\cot 2\theta$，或 $\theta=-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$，则 $\xi\eta$ 的系数变为零。用这个 θ 值，方程(8)中 ξ^2 的系数变为

$$\cos^2\theta - 2\cot 2\theta\sin 2\theta + (1 + 4\cot^2 2\theta)\sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta/\cos^2\theta = \tan^2\theta.$$

类似地，方程(8)中 η^2 的系数可化为 $\cot^2\theta$。因此，方程(8)变为

$$\tan^2\theta\xi^2 + \cot^2\theta\eta^2 = 1. \tag{9}$$

如果我们写出 $k=\tan\theta$，那么方程(9)就正好化简为方程(5)。因此，这两个应变椭球是相等的；一个应变椭球转了角度 θ 变到另一个应变椭球。这就证明了纯剪切与简单剪切的等价性。

为了寻求 k 与 s 的关系，我们注意到

$$\cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{2}[\cot\theta - \tan\theta].$$

因此，由于 $s=-\cot 2\theta$ 和 $k=\tan\theta$，故有

$$-s = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - k\right]，与 k = s + \sqrt{(s^2 + 1)} \tag{10}$$

5.3 一个长度为 60cm，直径为 6cm，壁厚为 0.12cm 的钢管，轴向伸长 0.010 cm，直径膨胀 0.001cm，扭转了 1°。试确定管中的应变分量。

5.4 对图 $P5.4$ 中所示桁架，试确定

(a)杆中载荷。

(b)杆中应力。

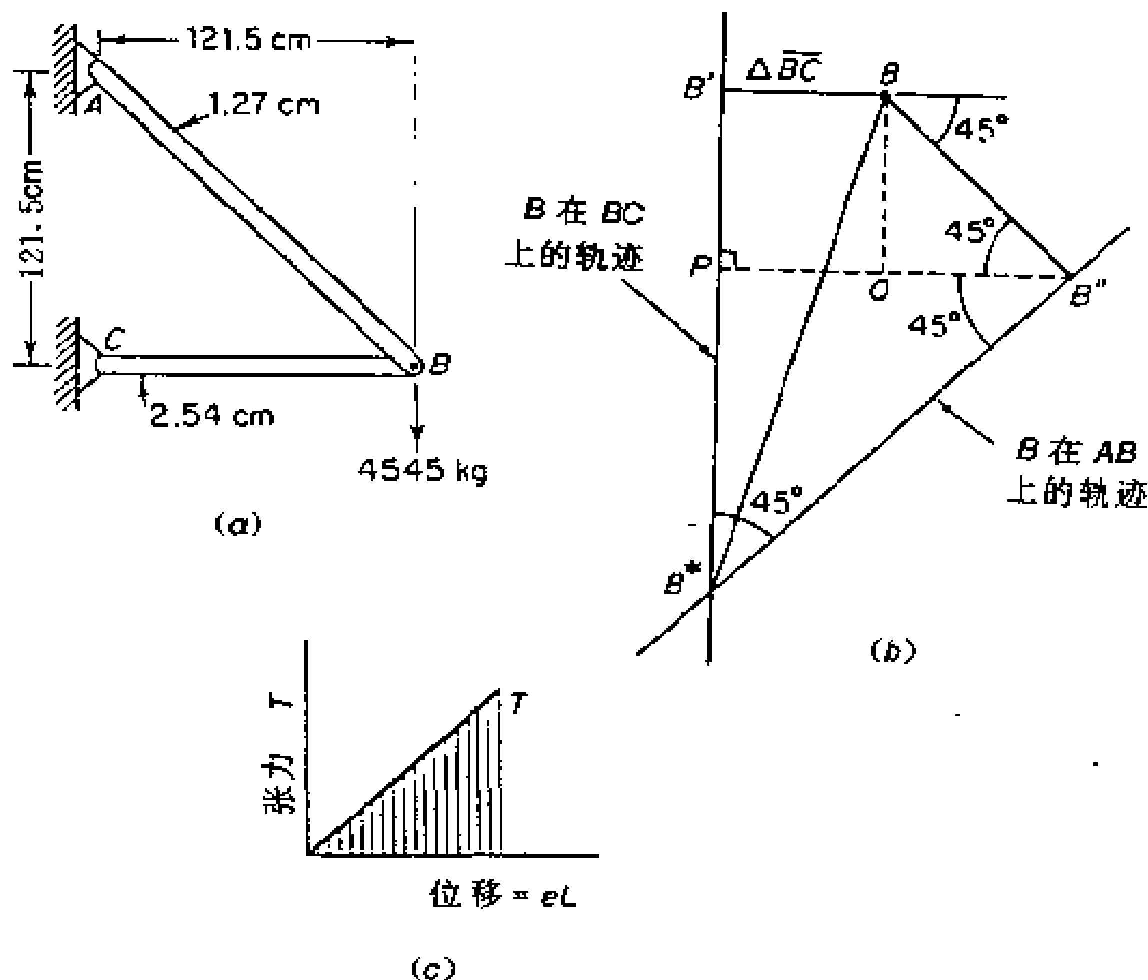


图 $P5.4$ 桁架和求 B 点位移的方法

(a)桁架；(b)BC 臂上 B 点的轨迹 $BB'B^*$ 和 AB 臂上 B 的轨迹 $BB''B^*$；(c)阴影部分面积正比于杆中所贮存的受拉时产生的应变能

(c)假设杆的一维应力-应变关系 $e=\sigma/E$，钢的杨氏模量是 $E=207$ GPa。试确定杆中的纵向应变 e。

(d)确定加载点 B 处的位移向量。

答案 (b) $\sigma_{AB}=503\text{MPa}$

$\sigma_{BC}=-88.2\text{MPa}$

(c) $e_{AB}=2.4\times10^{-3}$

$e_{BC} = -4.25 \times 10^{-4}$

(*d*) 0.64cm

解 杆中载荷可用第一章中的静平衡方法确定。我们得到 AB 中拉力为 6428kg($\sqrt{2} \cdot 10^4$ 磅),BC 中压力为 4545kg($-10,000$ 磅)。用构件的横剖面积去除载荷就得到应力。再除以杨氏模量,得到应变 $e_{AB} = 2.405 \times 10^{-3}$和 $e_{BC} = -0.425 \times 10^{-3}$。

要确定 B 点位移,我们注意到钢杆是铰接的。杆 BC 缩短的结果使得 B 点移到左边,但是杆 B 能绕 C 摆动,因而 B 的可能位置的轨迹位于以 C 为圆心,以$\overline{BC}$为半径的圆弧上。对于非常小的 $\Delta\overline{BC}$(与 BC 比较),这个轨迹是垂直于$\overline{BC}$的线段。类似地,杆 AB 伸长 $\Delta\overline{AB}$在 AB 上 B 的轨迹位于垂直于 AB 的弧上。这些弧的交点 B^*,是移动后连接点 B 的最后位置。

为了计算位移$\overline{BB^*}$,我们从图 $P5.4(b)$看出

$$\overline{BB^*} = \sqrt{\overline{BB'}^2 + \overline{B'B^*}^2} = \sqrt{\overline{BB'}^2 + (\overline{B'P} + \overline{PB^*})^2}$$

$$= \sqrt{\overline{BB'}^2 + (\overline{B'P} + \overline{PB''})^2}$$

$$= \sqrt{\overline{BB'}^2 + (\overline{B'P} + \overline{PQ} + \overline{QB''})^2}$$

$$= \sqrt{\overline{BB'}^2 + (\overline{BQ} + \overline{BB'} + \overline{QB''})^2}.$$

现在,

$$\overline{BB'} = |e_{BC}| \cdot 121\text{cm} = 5.26 \times 10^{-2}\text{cm}$$

$$\overline{BQ} = \overline{BB''}\cos 45^\circ = e_{AB}\,\overline{AB}\cos 45^\circ = 0.293\text{cm}$$

类似地,$\overline{QB''} = \overline{BQ} = 0.293$cm。因而,我们求得$\overline{BB^*} = 0.640$cm。

注 求 B 点位移的另一种方法,载荷所作的功等于杆中贮藏的应变能。当杆承受由 0 逐渐增加到 T 的拉力时,它的长度变化为 $eL = TL/EA$,其中 L 是杆长,A 是横剖面积,杆中贮藏的应变能等于$\frac{1}{2}(T^2L/AE)$,见图 $P5.4(c)$。现在,当把 W 的载荷逐渐加到托架上的时候,它所作的功等于 $\frac{1}{2}W \cdot \delta$,其中 δ 是载荷方向的位移,即位移的垂直分量。因为结构是线弹性的,力-挠度关系是线性的,所以因数$\frac{1}{2}$是必需的,因而代表所作的功的曲线下面的面积是$\frac{1}{2}$(载荷×挠度)。因此,令所作功等于贮藏的应变能后,就得到

$$\frac{1}{2}W \cdot \delta = \frac{1}{2}\frac{T_{AB}^2 L_{AB}}{EA_{AB}} + \frac{1}{2}\frac{T_{BC}^2 L_{BC}}{EA_{BC}}.$$

把数值代入上式后，得到 $\delta = 0.635\text{cm}$。连接点 B 的总位移是 $(\delta^2 + \Delta \overline{BC}^2)^{1/2} = 0.640\text{cm}$。

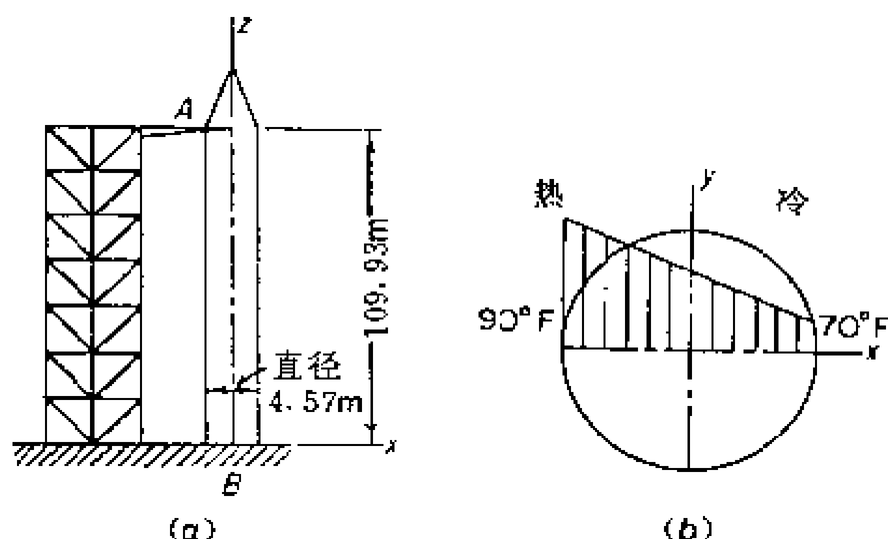


图 P5.5 发射塔的热挠度

(a)火箭的尺寸 (b)温度分布

5.5 一个火箭发射塔受到火箭在太阳下不均匀加热所引起的热挠度的影响(图 P5.5)。假设火箭体是一个圆柱体，若下面的一些假设成立，试估计顶端 A 点的水平位移：

(a)线热膨胀系数是 $\alpha = 0.555 \times 10^{-5}/°\text{C}$。

(b)面对太阳一侧的火箭体内的最高温度比背阴侧的最低温度高 20°F。

(c)沿长度(纵轴)方向的温度分布是均匀的，但沿 x 轴方向是线性变化的。

(d)由于(c)的结果，在热膨胀中，火箭的平剖面仍保持平面。

(e)火箭不受载荷，可自由变形。

提示　先计算热应变，然后积分，得到挠度。

答案　两边的热应变差 $= \alpha T = 20 \times 10^{-5}$。顶端挠度 $= 26.3\text{cm}$。

5.6 试推导一个承受小应变 e_{ij} 的单位体积元素的体积变化表达式。

试证明当应变较小时不变量 $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 代表了单位体积的体积变化。

解 按照 5.7 节中讨论的普遍原理，可以找到一组直角笛卡儿坐标，对于它应变张量可假设为 $e_k\delta_{ik}$ 形式（对 k 不求和），其中 e_1，e_2，e_3 是主应变。考察一个受应变的物体，并选择一个单位立方体，其边沿应变主轴的方向。原来长度为 1 的每一个边，变形后变为 $1+e_i$。因此，新体积是 $(1+e_1)(1+e_2)(1+e_3)=1+e_1+e_2+e_3+$ 高阶项。所以，在略去高阶项后，得到单位体积的体积变化是 $e_1+e_2+e_3$。

从方程(5.7-3)知道，$I_1=e_{ij}\delta_{ij}$ 是一个不变量。对主轴它等于 $e_1+e_2+e_3$。因此，$I_1=e_1+e_2+e_3$ 对任何笛卡儿参考标架均一样。因此，$I_1=e_{ij}\delta_{ij}$ 的意义就是应变很小时单位体积的体积变化。

5.7 用对于坐标系 x_1，x_2，x_3 的分量，给定了一个应力场 σ_{ij}，试问：

(*a*)主应力的定义是什么？

(*b*)主轴的定义是什么？

(*c*)简要地描述如何从原则上确定主方向(即主轴方向)。

(*d*)考察对于同一轴的应变张量，你怎样确定主应变及相应的主方向？

(*e*)若应力与应变张量用关系

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij},$$

相联系，其中 λ，μ 是常数，试证明应力主轴与应变主轴一致。

5.8 在地震研究中，瑞利(Rayleigh)研究了形式为

$$u = Ae^{-by}\exp[ik(x-ct)],$$
$$v = Be^{-by}\exp[ik(x-ct)],$$
$$w = 0$$

的弹性力学线性方程的解。

如果 xz 平面代表地面，y 代表进入地球的深度，u，v，w 是地球的质点的位移，那么上面的解就代表了在 x 方向传播的波，其速度为 c，其幅度自地面按指数衰减。假设波发生在地球内部，地面是自由的，即作用在地面上的应力向量为零。在检验了运动方程与边界条件以后，他求得常数 A，B，b，c，得到解

$$u = A(e^{-0.8475ky} - 0.5773e^{-0.3933ky})\cos k(x - l_r t),$$
$$v = A(-0.8475e^{-0.8475ky} + 1.4679e^{-0.3933ky})$$
$$\sin k(x - l_r t),$$
$$w = 0.$$

常数 l_r 称为瑞利波速，若波松比为 $\frac{1}{4}$，它等于剪切波速的 0.9194

倍。这个解满足波在具有自由表面 $y=0$ 的半无限弹性体中传播的条件。质点在 xy 平面内运动，幅度随着离自由表面距离的增加而递减（见图 $P5.8$）。它代表了有地震时，在地震仪上所能看到的最突出的波。

(a)试画出波形的草图。

(b)试画出自由表面 $y=0$ 上，几个 x 值处质点运动路径的草图。对 $y>0$ 的几个不同 x 值的质点，也画出它们运动路径的草图。

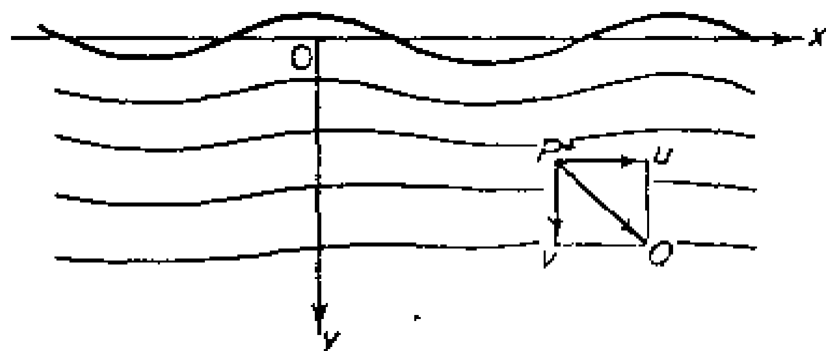


图 $P5.8$　瑞利表面波

(c)试证明质点运动是衰减的。

(d)试确定在任意给定瞬时，何处发生最大主应变，以及这个应变的值。

解 (a)(b)(c)略。

(d)因 $w=0$，只有应变分量 e_{xx}，e_{yy}，e_{xy} 不恒为零。指数函数 e^{-by}，$b>0$，表示 u,v,w 及它们的导数的最大值发生在 $y=0$ 处。在这个平面上，在 $t=0$ 时，有

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=-Ak(1-0.5773)\sin kx,$$

$$e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=Ak[(0.8475)^2-1.4679\times 0.3933]\sin kx,$$

$$e_{xy}=\frac{Ak}{2}[(-0.8475+0.5773\times 0.3933)$$

$$+(-0.8475+1.4679)]\cos kx=0.$$

因此，最大主应变是

$$e_{xx}=\pm 0.4227Ak, e_{yy}=\pm 0.14094Ak.$$

5.9　考察一个单位尺寸的方板，其变形如图 $P5.9$ 所示，试求应变分量。

解　其变形可用下面一些方程来描述，

$$x_1=a_1+\frac{1}{\sqrt{3}}a_2, x_2=a_2, x_3=a_3.$$

或

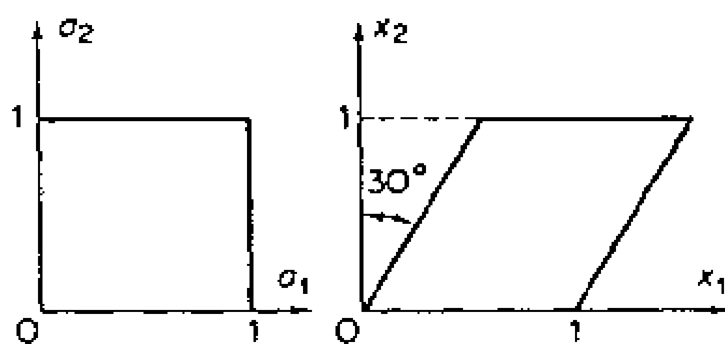


图 $P5.9$　方板的变形

$$a_1 = x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} x_2, a_2 = x_2, a_3 = x_3.$$

因此

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= \left\{ \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} \right)^2 - 1 \right] da_1^2 + 2 \frac{\partial x_1}{\partial a_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_2} da_1 da_2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial a_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_2} \right)^2 - 1 \right] da_2^2 \right\} \\ &= \left\{ \left[1 - \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_1^2 - 2 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - 1 - \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_2^2 \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} da_1 da_2 + \left(\frac{1}{3} \right) da_2^2 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} dx_1 dx_2 - \frac{1}{3} dx_2^2. \end{aligned}$$

但是从(5.2-10)知道，这是 $2(E_{12}+E_{21})da_1da_2+2E_{22}da_2^2$。因此

$$E_{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, E_{22} = \frac{1}{6}, e_{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, e_{22} = -\frac{1}{6};$$

而所有其他的应变分量均为零。

5.10　再次考察方板，但是这次向右的剪切只是一个非常小的量，使得

$$x_1 = a_1 + 0.01a_2, \quad a_1 = x_1 - 0.01x_2,$$
$$x_2 = a_2, x_3 = a_3.$$

于是

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= 0.01 da_1 da_2 + (0.01)^2 da_2^2 \\ &= 0.01 dx_1 dx_2 - (0.01)^2 dx_2^2. \end{aligned}$$

因此

$$E_{12} = 0.0025, E_{22} = 5 \times 10^{-5},$$

$$e_{12} = 0.0025, e_{22} = -5 \times 10^{-5}.$$

在这种情况，E_{ij}与e_{ij}度量近似相等。

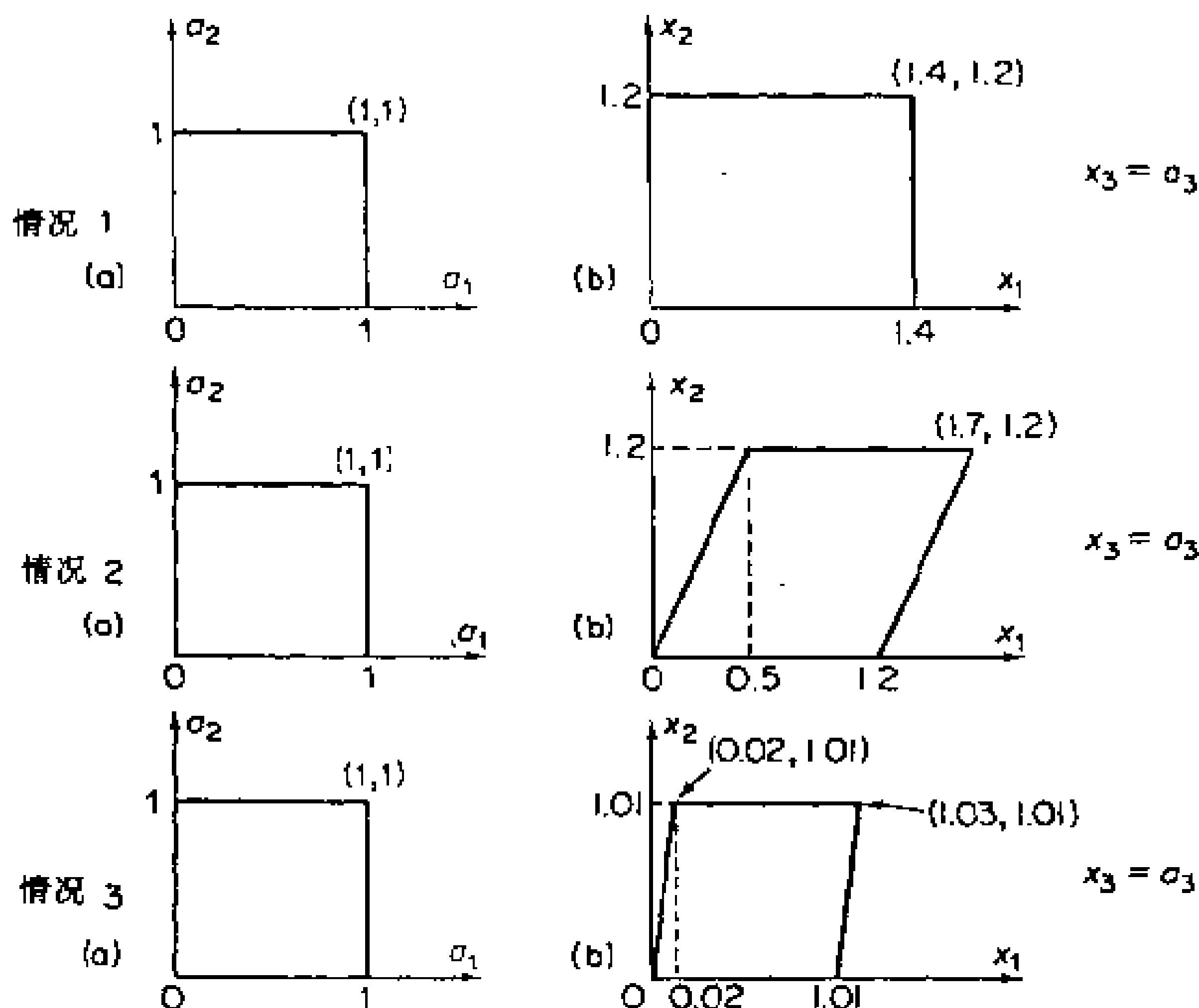


图 $P5.11$ 方板的三种变形型式

5.11 一个方板自形状(a)均匀变形至形状(b)，如图 $P5.11$ 中的三类情况所示。试确定应变分量 $E_{11}, E_{22}, E_{12}; e_{11}, e_{22}, e_{12}$。

答案 情况 1，从形状(a)导致形状(b)的变换是 $x_1 = 1.4a_1, x_2 = 1.2a_2, x_3 = a_3$. 情况 2，变换是 $x_1 = 1.2a_1 + 0.5a_2, x_2 = 1.2a_2, x_3 = a_3$. 情况 3，有 $x_1 = 1.01a_1 + 0.02a_2, x_2 = 1.01a_2, x_3 = a_3$. 从这些变换，可自方程(5.3-5)得到应变分量。情况 3 适合于由方程(5.3-7)给出的"无限小"应变。

5.12 一个单位方板 $OABC$ 以三种方式变形到 $O'A'B'C'$，如图 $P5.12$ 中所

示。在情况(a)、(b)，(c)的每一种情况中，把方板中每一点的位移场 u_1、u_2 写成原始状态点的位置(a_1，a_2)的函数，然后确定应变 E_{ij}，e_{ij}。假设 $u_3=0$，u_1，u_2 与 x_3 或 a_3 无关。在情况(b)与(c)中，假设 OA，OA'、OC，OC' 的长度均为 1。再有，若 ϵ_1，ϵ_2，θ，ψ 都是无限小的话，试求应变 e_{ij} 的简化表达式。

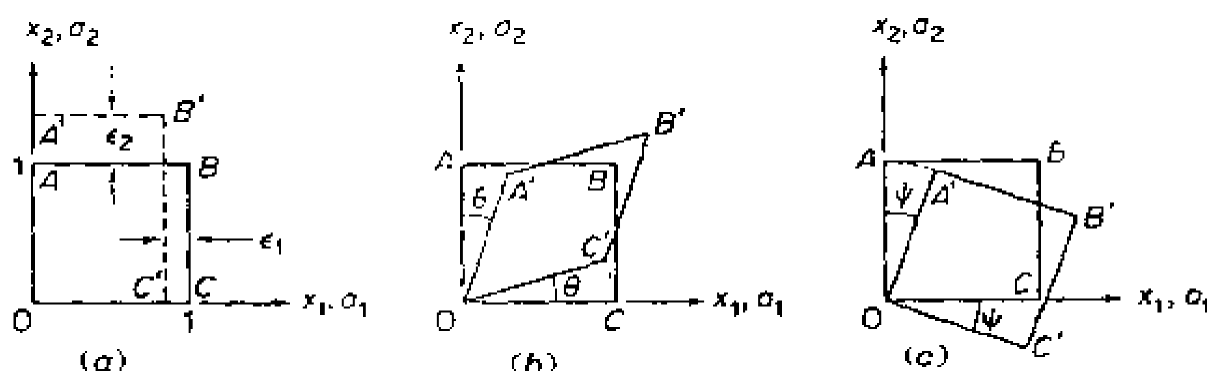


图 P5.12　$OABC$ 到 $O'A'B'C'$ 的变形

5.13　一个单位方板 $OABC$ 首先承受如图 P5.12(a)所示的拉伸，然后再承受如图 P5.12(b)所示的畸变，最后承受如图 P5.12(c)所示的旋转。经过这样连续的三步变形以后，试问应变 E_{ij}，e_{ij} 的值是多少？首先回答 ϵ_1，ϵ_2，θ，ψ 为有限值的情况，然后再回答 ϵ_1，ϵ_2，θ，ψ 为无限小值的情况。

5.14　当图 P5.14 中的一个楔变换到另一个楔时，试求应变 E_{ij} 与 e_{ij}。第一个楔的顶角为 30°；另一个楔的顶角是 90°。两个楔的半径相同。

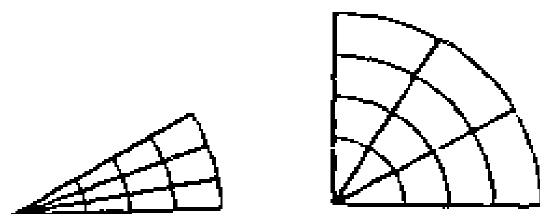


图 P5.14　改变角度的楔

5.15　令 $ABCD$ 是 x-y 平面内的一个单位方板(图 P5.15)，$ABCD$ 是大的可变形物体中的一部分，这个变形体承受由下式给出的均匀小应变。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

试问直线 AC 与 AE 的长度变化是多少？

答案　AC 变化 0.00423，AE 变化 0.00290。

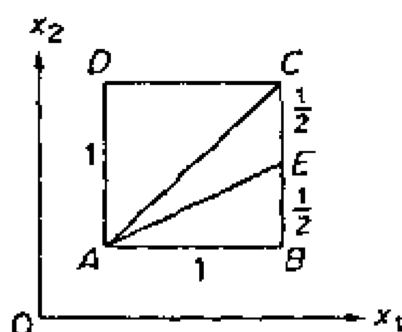


图 $P5.15$ 在已知应变的板内线段的长度变化

5.16 一个方薄膜$-1\leqslant x\leqslant 1$,$-1\leqslant y\leqslant 1$,被拉伸,其位移用

$$u = a(x^2 + y^2),$$
$$v = bxy,$$
$$w = 0.$$

描述。试问在(x,y)处的应变分量是什么?在原点$(0,0)$处的主应变是什么?假设常数a,b无限小。

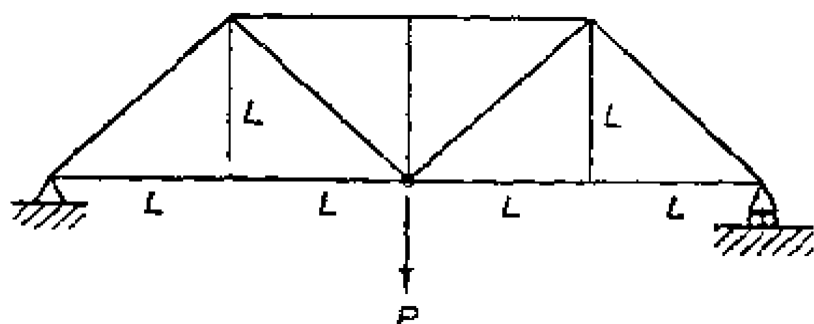


图 $P5.17$ 桁架的连接点处的垂直挠度计算

5.17 一个铰接桁架,如图 $P5.17$ 所示,其中L是垂直构件和水平构件的长度。所有构件的横剖面面积均等于A。所有构件的材料相同,杨氏模量为E,桁架中心受载荷P。试问在载荷作用点处的垂直挠度是多少?

答案 用习题 5.4 中所讲的应变能法求解本题,挠度是 $5.828PL/AE$。

5.18 以下情况常在水流、金属成形、细胞膜中碰到:材料不可压缩。z方向位移w为零。x,y方向位移u、v为无限小,且是x,y的函数。若在某一域内

$$a = (1 - y^2)(a + bx + cx^2),$$

其中 a,b,c，是常数，试计算 y 方向的位移 v。

提示：利用习题 5.6 中所示事实。

5.19 椭圆截面柱形钢棒扭转问题(图 $P5.19$)。求得其位移可用如下方程描述：

$$u = \alpha zy, v = \alpha zx, w = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\alpha xy$$

此处 α 是棒单位长扭角。设 $a=2\text{cm}, b=1\text{cm}$ 计算在点 $A(x=0, y=0)$ 处的应变。A 处最大剪应变是多少？什么位置上有最大切应变和最大扭转？

部分答案：$e_{xz}=-\frac{8}{5}\alpha \quad e_{yz}=0$，最大切应变$=-\frac{8}{5}\alpha$ 最大正应变$=\pm\frac{8}{5}x$。

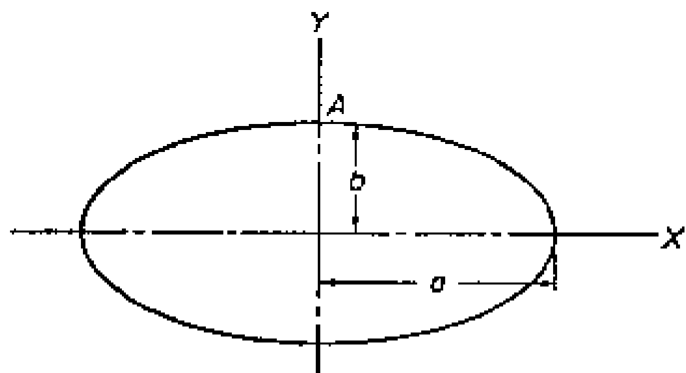


图 $P5.19$ 椭圆横截面

5.20 微分任一可分析函数 $\phi(x_1, x_2, x_3)$，可求得一位移场 $u(u_1, u_2, u_3)$，即按下面方程定义：

$$u_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

什么是此位移场的应变分量和应变不变量？考虑特殊情况

$$\varphi = \frac{C}{R} + DR^2$$

其中 $\qquad R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

且 C、D 是常数。将它用于内半径为 a、外半径为 b 的空心球，球中应变值是多少？

5.21 图 $P5.21$ 是另一个从 Borelli 三百年前的书中取来的(见习题 1.23)。展示的是心脏表面肌肉纤维的排列。肌纤维的收缩和伸长改变了组织的形状和应变。此排列对心脏功能有很大影响。如果肌肉构形像图 $P5.2$(习题 5.2)所示的简单剪切中的平行四边形，纤维平行于倾斜的边界，然后肌肉收缩使肉块变成矩形而保持体积和宽度不变。另一方面，如果肌肉纤维平行于 y 轴，如图 $P5.2$ 所示的纯剪切，那么由于收缩，块的宽度将凸出。当心脏泵血时，左、右心室将扩大和收缩，但心肌

层并不改变体积，也不局部凸出（不像上臂的肱二头肌）。Borelli 认为他知道原因所在。请按此提示加以讨论，尽量加上理论和实验细节。

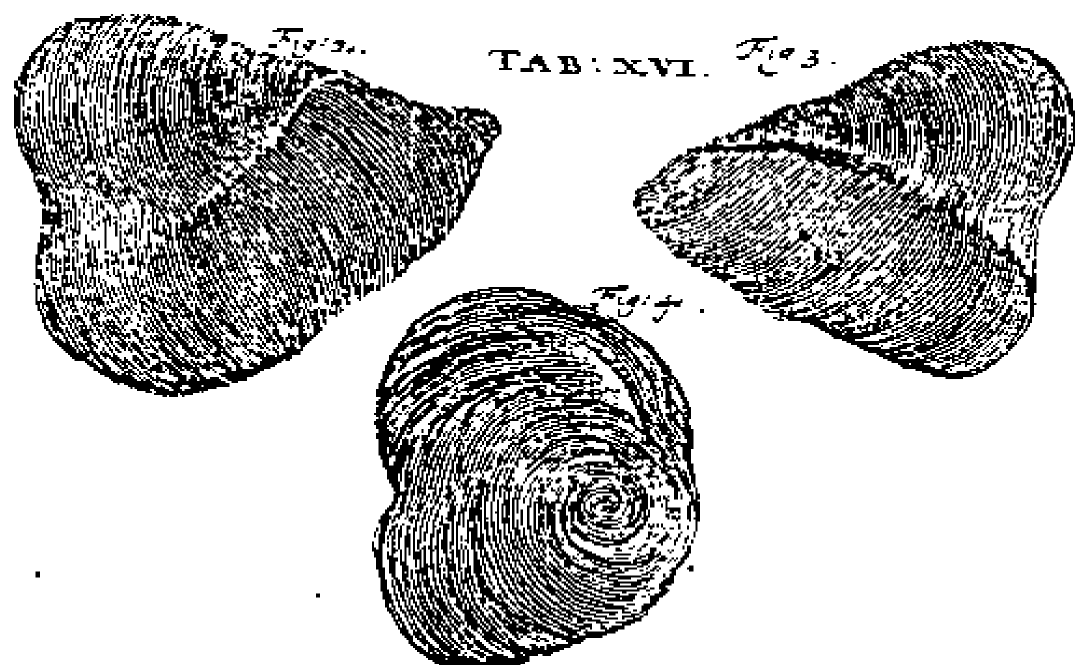


图 $P5.21$　Borelli 作出的经典原图

关于心肌结构的现代资料可查阅 streeter，D. Jr，的“心脏总体形态和肌纤维几何”，《生理学手册》，第二节，“心血管系统”第一卷，“心脏”(Berne，R. M. 和 Sperelakis，N.)，美国生理学会，Bethesda MD，61～112 页。推广此结果去解释为何一只蟹或龙虾能靠封在刚性壳里的肌肉去运动它们那强劲的钳子，这些肌肉的应变当是哪一种？

6 速度场和协调条件

我们将考察速度场并定义应变率张量。然后我们将研究应变分量或应变率分量的协调性问题。

6.1 速度场

为了研究流体的流动，我们一般关心的是速度场，也就是说是关于流动物体中每一个质点的速度。我们用参考标架 $o\text{-}xyz$ 确定每一个流体质点的位置；那么就可以通过确定每一点 (x,y,z) 速度的速度向量场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ 来描述流场。采用分量形式，速度场表示成函数

$$u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)$$

或者，若采用指标符号，则用 $v_i(x_1,x_2,x_3)$ 表示速度场。

对一个连续流动，我们考察连续、可微的函数 $v_i(x_1,x_2,x_3)$。但是，我们有时必须研究相邻点速度的关系。令质点 P 与 P' 在某个瞬时分别位于 x_i 和 $x+\mathrm{d}x_i$。在这两点上的速度差是

$$\mathrm{d}v_i=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{6.1-1}$$

式中偏导数 $\partial v_i/\partial x_j$，取其在质点 P 上的值。现在

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{6.1-2}$$

我们定义变形率张量 V_{ij} 与旋转张量 Ω_{ij}。

$$V_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{6.1-3}$$

$$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{6.1-4}$$

那么

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = V_{ij} - \Omega_{ij} \tag{6.1-5}$$

显然 V_{ij}是对称的，Ω_{ij}是反对称的；即

$$V_{ij} = V_{ji} \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \tag{6.1-6}$$

因此，Ω_{ij}张量只有三个独立的分量，并存在一个与 Ω_{ij}对偶的向量 $\boldsymbol{\Omega}$；这样，

$$\Omega_k = \varepsilon_{kij}\Omega_{ij}\text{；即} \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathrm{curl}\mathbf{V} \tag{6.1-7}$$

其中 ε_{kij}是排列符号，它的定义见 2.3 节方程(2.3-16)。向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 称为旋转向量。

方程(6.1-7)和(6.1-1)与方程(5.5-3)和(5.5-5)类似。它们的几何意义也类似。因此，速度场的分析与无限小变形的分析非常类似。的确，如果用无限小时间间隔 dt 去乘 v_i，则结果是无限小位移 $u_i = v_i dt$。因此，凡是我们从无限小应变场学到的东西都可以立刻相应地推广到应变变化率上，只要用速度这个词代替位移即可。

6.2 所谓的协调条件

假设我们对一个未知函数 $u(x,y)$给出了有两个偏微分方程的方程组，如

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 3y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \tag{6.2-1}$$

我们知道，这些方程不能解：我们有过多的互不相容的方程。如果将两个方程(6.2-1)计算二阶导数 $\partial^2 u/\partial x \partial y$，就可明白不相容性了：第一个方程得出 3，第二个方程得出 $2x$。它们是不等的。

因此，当给出偏微分方程时，就产生了可积性的问题。微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=g(x,y),\tag{6.2-2}$$

只有当满足一定条件时才能被积出，这个条件是

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}\tag{6.2-3}$$

方程(6.2-3)称为可积性条件或协调(性)方程。

现在考察像可能存在于固体火箭药柱中那样的平面应变状态。假设有一个工程师做了一个实验模型，利用各种仪器，如应变仪，光弹性仪器，与云纹分析相结合的激光全息等方法，获得一组应变数据，它们可以表示为

$$\begin{aligned}&e_{xx}=f(x,y),\quad e_{yy}=g(x,y),\\&e_{xy}=h(x,y),\quad e_{zz}=e_{xz}=e_{zy}=0\end{aligned}\tag{6.2-4}$$

这就产生一个问题：这些数据是不是自身相容的。能够检验这个相容性吗？如果它们是相容的，我们能从所得的这些数据，计算出位移 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 吗？

如果是小应变的话，上述问题可以归纳为对下述微分方程进行积分的数学问题。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y),(=e_{xx})\\&\frac{\partial v}{\partial y}=g(x,y),(=e_{yy})\\&\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=2h(x,y),(=2e_{xy})\end{aligned}\tag{6.2-5}$$

现在，若把上面第一个方程对 y 微分两次，第二个方程对 x 微分两次，第三个方程对 x 和 y 各微分一次，则得到

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\tag{6.2-6}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}=2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\tag{6.2-7}$$

将方程(6.2-6)代入方程(6.2-7)有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\tag{6.2-8}$$

实验数据必须满足这个方程。如果不满足，那么数据就不相容，必然有了误差。

用应变分量表示上面的结果，有

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6.2-9}$$

方程(6.2-9)称为平面应变状态下的协调方程。

对于流体的两维速度场可进行类似的讨论。例如，如果流体是双折射的，就可以用光学双折射的办法来测量应变率张量的分量。或者可以用理论的办法来求得一组应变率。为了检验相容性，我们必须有

$$\frac{\partial^2 V_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 V_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6.2-10}$$

其中 V_{ij} 是应变率张量分量(见6.1节)。不过，在流体力学中，这个方程被看作是可积性条件。这样，协调性和可积性就意味着是同一回事。

6.3 三维应变分量的协调性

把上节讨论的问题推广到三维，我们怎样积分微分方程

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] \tag{6.3-1}$$

以决定 u_i 呢?

只要对三个未知函数 u_i 有六个方程，使得函数 e_{ij} 满足协调条件时，方程组(6.3-1)才会有单值解。

对方程(6.3-1)微分，得

$$e_{ij,kl}=\frac{1}{2}(u_{i,jkl}+u_{j,ikl}) \tag{6.3-2}$$

其中在“,”后面的指标 k 和 l 表示依次对 x_k 和 x_l 求偏导数，交换下标，有

$$e_{kl,ij}=\frac{1}{2}(u_{k,lij}+u_{l,kij}),$$

$$e_{jl,ik} = \frac{1}{2}(u_{j,lik} + u_{l,jik}),$$

$$e_{ik,jl} = \frac{1}{2}(u_{i,kjl} + u_{k,ijl}).$$

从这些方程，我们立即证明

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \tag{6.3-3}$$

这就是圣·维南协调方程。

方程(6.3-3)所代表的 81 个方程中，只有 6 个是基本的。由于考虑到 e_{ij}中 ij 和 $e_{ij,kl}$中的 kl 的对称性，其余的或者恒等，或者重复。这 6 个方程用非节略符号写为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right), \\
2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}, \\
2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}, \\
2\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{6.3-4}$$

方程(6.3-3)或者(6.3 4)是必要条件，是不是充分条件呢？这样，将 6 个协调条件和方程(6.3-1)给出的 6 个微分方程加在一起，是不是能保证连续介质体存在 $u_1(x、y、z)$、$u_2(x,y,z)$、$u_3(x$、$y,z)$函数有单值连续解呢？要回答这个问题，首先我们解释是由于应变分量只决定物体内点的相对位置，并且因为任何刚体运动只对应于零应变，所以我们预料，解 u_i 只能确定到还允许相差任意刚体运动的程度。但是，如果任意指定 e_{ij}，我们就可预料会得到类似于图 6.1 中所示的情况。这里给出物体的一个连续正方形，正方形的边长分别记为 AB，BC，AD，和 DE(C 和 E 是相同的点)，

该正方形是由连续小正方单元组成(每个单元与图 5.4 的意义相同)。每个单元将按照任意指定的应变开始变形。由于单元之间变形是相粘接的,首先沿 AB 和 BC,然后沿 AD 和 DE,就可能在端点 C 和 E 点之间出现分离,即是两点之间出现间隙或者发生材料搭接。要存在单值连续解(只适合于刚体运动),终端 C 和 E 只有在受应变的构件中,才能满足。只有沿正方形各边的指定的应变场服从协调性条件,才能保证做到这点。

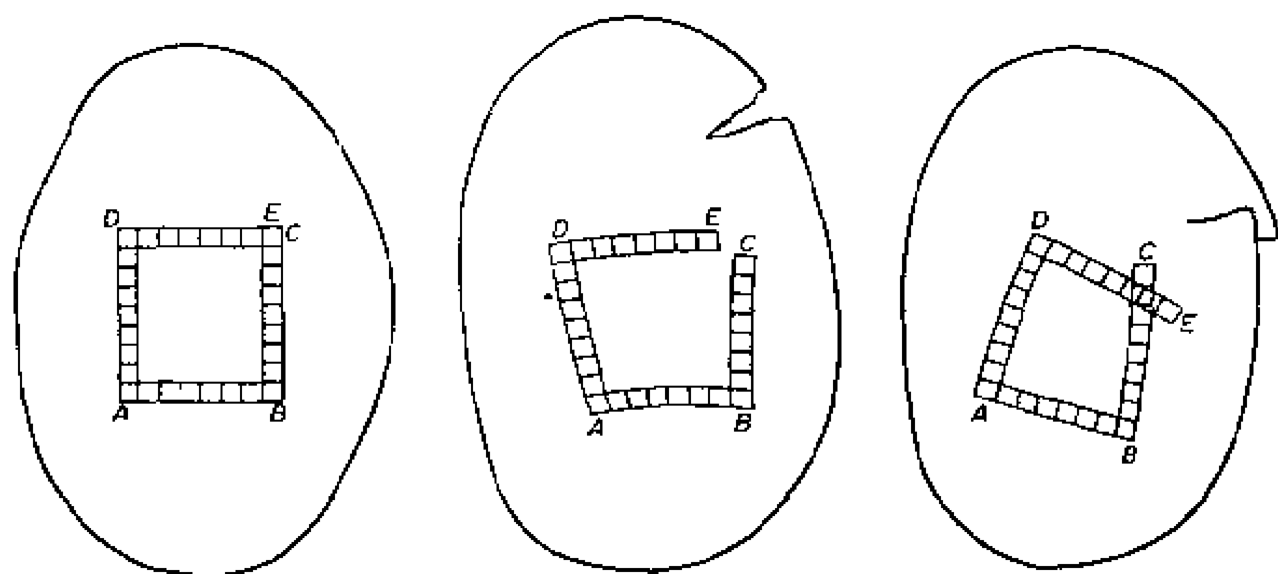


图 6.1 协调性要求说明

根据这种理由我们可从物体上任何一点 A 开始用线积分求到 C 点的位移(u_1, u_2, u_3),在满足条件下,沿任意的两条路径积分,所得的结果应相等。这一点,在 1906 年塞萨洛(Cesaro)已证明如果包含任意路径的域是单连的,则唯一解法的充分条件恰好是方程(6.3-4)。然而,对多连域,需要附加的充分条件,详见作者的固体力学基础(Foundations of Solid Mechanics, Englewood Cliffs, N. J. Prentice Hall, 1965, PP. 101—108)。

习 题 6

6.1 考察流体的运动,这个流体具有从势函数导出的速度分量 u 和 v

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

而分量 w 恒为零，试画出下面一些势函数的速度场。

(a) $\phi=\frac{1}{4\pi}\log(x^2+y^2)=\frac{1}{2\pi}\log r,(r^2=x^2+y^2)$

(b) $\phi=x$

(c) $\phi=Ar^n\cos n\theta,(\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x})$

(d) $\phi=\cos\theta/r$

注：如流场的速度分量从一个势函数 $\phi(x,y,z)$ 导出，该流场称为有势流。在这个习题所指定的例子中，我们有几种用极坐标表示 ϕ 的情况。如果我们注意到速度向量 (u,v) 正好是数量函数 $\phi(x,y)$ 的梯度的话（见第 2 章），那么从向量分析知道，极坐标中的速度分量就是

$$u_r=\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r},\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial\theta} \tag{1}$$

其中，u_r、u_θ 分别是径向与切向速度分量。见图 $P6.1$

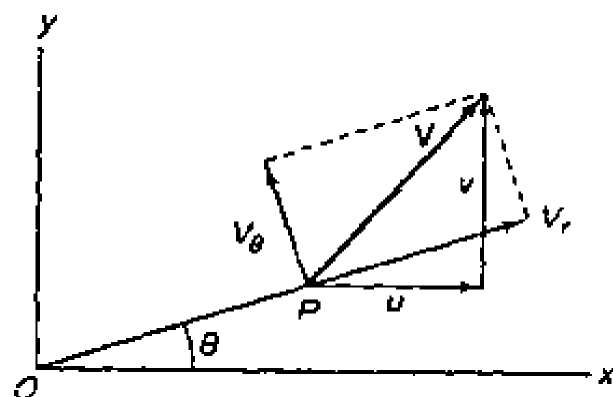


图 $P6.1$ 极坐标中的速度分量

这些关系可以形式地推导如下，因为

$$r^2=x^2+y^2,\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}, \tag{2}$$

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta, \tag{3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,$$

故有

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=u\cos\theta+v\sin\theta \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\theta=-u\sin\theta+v\cos\theta。 \tag{5}$$

但是从图 $P6.1$ 可看出

$$u_r=u\cos\theta+v\sin\theta, u_\theta=-u\sin\theta+v\cos\theta。 \tag{6}$$

因此，从方程(4)和(5)得到方程(1)

6.2 二维不可压流体的运动可以从一个流函数 ψ 导出，如下：

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, v=\frac{\partial\psi}{\partial x}, w=0。$$

对下面一些函数画出 ψ=常数的曲线草图，并与前一个习题的结果进行比较：

(a) $\psi=c\theta$,

(b) $\psi=y$,

(c) $\psi=Ar^n\sin n\theta$,

(d) $\psi=-\frac{\sin\theta}{r}$.

6.3 对于习题 6.1 和 6.2 所列出的一些势函数所描述的流动，

(a)试证明在每一种情况中，旋度均为零。

(b)试推导应变率张量的表达式。

解：方程(6.1-7)给出的旋度 Ω 的分量为方程(6.1-4)给出。在二维流动中，只有一个旋度分量 $\Omega_{12}=(\partial v/\partial x-\partial u/\partial y)/2$ 不恒等于零。若 $u=\partial\varphi/\partial x, v=\partial\varphi/\partial y$，则 $\Omega_{12}\equiv0$。因此，所有位势流都是无旋的。若

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

则 Ω_{12} 是

$$旋度=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

在极坐标中，有

$$旋度=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) \tag{3}$$

在习题 6.2 中的所有情况都是无旋的，直接代入就可以证实这点。

对(b)部分，极坐标中的应变率张量的分量，可以用 5.8 节所示的坐标变换法导出，或由 5.9 节所示的直接法导出。对符号稍加改变，就得到

$$V_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}\quad V_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}$$

$$V_{r\theta} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right\}$$

有了这些方程，问题就很容易解决了。

6.4　假设在单位圆内我们给出了所定义的下述位移场

$u = ax^2 + bxy + c$

$v = by^2 + cx + mz$

$w = mz^2$

有没有任何协调性的问题？

6.5　假设在单位圆内的位移场是

$u = ar\log\theta$

$v = ar^2 + c\sin\theta$,

$w = 0$

它是协调的吗？

6.6　在一个二维平面应变场内，用 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 描述位移，而沿 z 轴的 w 恒等于零。x, y, z 是一组直角笛卡儿坐标系。

(a)试用 u, v 表示应变分量 e_{xx}, e_{xy}, e_{yy}。

(b)试推导应变系 e_{xx}, e_{xy}, e_{yy} 的协调方程。

(c)下面的应变系是不是一个可能的应变系？

$e_{xx} = k(x^2 - y^2)$, $e_{yy} = kxy$, $e_{xy} = k'xy$,

其中 k, k' 是常数，所有其余应变分量为零。

答案：如果 $k' = -k$，上述应变系就是可能的。

6.7　有一个宽为 a 高为 b 的正方形平板，放在刚性基面上，见图 $P6.7$。该平板材料是各向同性的，且符合虎克定律（见方程 7.4-7），材料的密度为 ρ。这平板在竖直方向受到上边的均匀压力 P 和板本身的重力。

(a)试写出可能有的边界条件。

(b)导出可能的应力分布以满足平衡方程和应力确定的边界条件。

(c)计算应变值，并验证是否满足协调性条件。

(d)决定板材的位移值，所得位移值是连续和唯一的吗？

(e)所有指定的边界条件(a)是否满足？如果是，能不能肯定你所得的一组真实解是不是该问题的应力分布？如果边界条件不满足，那么，很显然你得不到一组解，必须完成两件事情。首先，你能否肯定用已获得的不同问题的一种解的方法来改变边界条件，其次回到原来的问题和步骤(b)，你能否求出可能是真实解的不同应力分布？有获得一种真实解

的一般方法吗？在步骤(a)中对边界条件的陈述有限制吗？我们能否说一些边界值问题好提，而另一些边界值问题不好提？边界值问题好提的标准是什么？

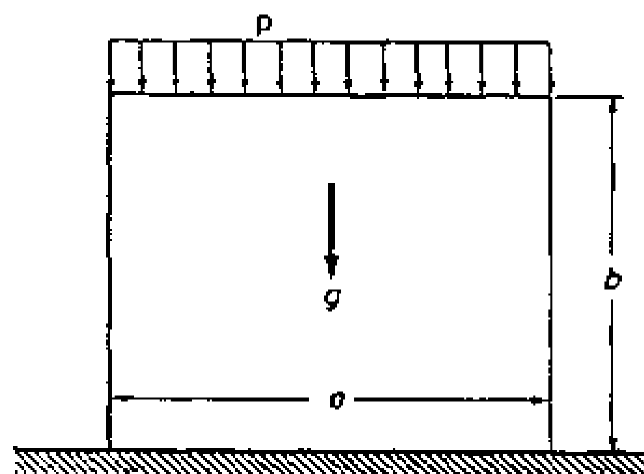


图 $P6.7$　一块受重力和压力的平板

7 本构方程

本章介绍了三种最常用的本构方程，它们是抽象了的数学形式，在此给出一个大致的轮廓，以表示它们的相同之处和差别。如果物质是各向同性的，还可以把它们大大地简化。由于各向同性的概念十分重要，而又经常被初学者轻易地忽视，我们将在第八章中专门讨论它。在第九章中将专门讨论真实物质的特性。

7.1 物质性质的说明

物质的性质由本构方程来描述。由于存在多种多样的物质，为了描述这几乎是无限多种的物质，需要为数甚多的本构方程，这本不奇怪。而令人惊讶的事实是：无粘性流体，牛顿粘性流体和理想弹性固体这三个简单的理想化的应力—应变关系却很好地描述了我们周围许多物质的力学特性。在本章中，我们只叙述这些理想化了的关系式，而不急于说明实际物质与这些理想定律之间或多或少的差别。显然，对于实际气体、非牛顿粘性流体、粘弹性固体、塑性体等，这些差别就很大了。这些我们将在第 9 章中研究。

描述一个物质特性的方程称为物质的本构方程。应力—应变关系描述了物质的力学特性，因此是本构方程。在本章中我们主要的目的是讨论应力—应变关系。还有其他一些本构方程，例如描述热传导的特性、电阻、质量传递等的本构方程。但与我们无直接的关系。

7.2 无粘性流体

无粘性流体的应力张量是各向同性的，即它的形式为

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} \tag{7.2-1}$$

式中 δ_{ij}为克罗内克符号，p 为压力，它是一个标量，无粘性流体中的应力分量可以用矩阵形式表示为

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{7.2-2}$$

在理想气体中，压力 p、密度 ρ 和温度 T 由状态方程

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{7.2-3}$$

相联系，式中 R 为气体常数。对于实际气体或液体，常常可以得到状态方程

$$f(p,\rho,T) = 0$$

不可压缩流体是一种特殊情况，它的状态方程只是

$$\rho = \text{常数}$$

于是，对于不可压缩流体，只剩下压力 p 是任意变量。它完全由运动方程和边界条件所确定。例如，液压机活塞上的力决定了其缸体中不可压缩流体的压力。

因为流体动力学主要涉及不可压缩流体，我们将看到压力是由边界条件所支配，而压力的变化（压力梯度）则由运动方程计算。

在许多问题中，可以把空气和水作为无粘性流体来处理。例如在环绕地球的潮汐，海洋里的波浪，飞机的飞行，喷咀中的流动，汽车发动机内的燃烧等等问题中，不考虑介质的粘性而把它作为无粘性流体处理，能够得到极好的结果。另一方面，在一些重要的问题中，例如，在处理作用在飞机上的阻力（无论流动是紊流还是层流），宇宙飞船重返大气层的加热以及汽车发动机的冷却等一些问题时，介质的粘性虽小但绝对不能忽略。

7.3 牛顿流体

牛顿流体是一种粘性流，其剪应力和变形率成正比。对于牛顿流体，应力—应变关系由下面的方程式确定

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathscr{D}_{ijkl}V_{kl} \tag{7.3-1}$$

式中σ_{ij}是应力张量，V_{kl}是变形率张量，$\mathscr{D}_{ijkl}$是流体的粘性系数张量，p是静压力。$-p\delta_{ij}$项代表流体静止（当$V_{kl}=0$）时可能的应力状态，根据状态方程，假定静压力p与流体的密度和温度有关。对于牛顿流体，假定张量$\mathscr{D}_{ijkl}$的元素与温度有关而与应力或变形率无关。四阶张量$\mathscr{D}_{ijkl}$具有$3^4=81$个元素。这些常数并非全部独立。检验张量σ_{ij}，V_{kl}的对称特性和可能存在于流体原子结构中的对称性，就可以得出理论上可能的独立元素数目。但是我们在此并不打算搞清楚这一点，因为我们知道，没有一种流体已经被研究得如此详细，以致可以确定它的张量$\mathscr{D}_{ijkl}$的全部常数。看来，绝大多数流体是各向同性的，他们的$\mathscr{D}_{ijkl}$结构可以大大地简化，这一点将在下面见到。对$\mathscr{D}_{ijkl}$的一般结构有兴趣的读者应该读7.4节及该处提到的参考文献，因为弹性常数张量C_{ijkl}具有类似的结构。

如果流体是各向同性的，即如果在任何直角笛卡儿坐标系统中，张量$\mathscr{D}_{ijkl}$具有相同分量的排列，那末就能够用两个独立的常数λ和μ来表示$\mathscr{D}_{ijkl}$（见8.4节）

$$\mathscr{D}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{7.3-2}$$

并且得到

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda V_{kk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \tag{7.3-3}$$

将方程(7.3-3)缩并可得：

$$\sigma_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu)V_{kk} \tag{7.3-4}$$

如假定平均正应力$\frac{1}{3}\sigma_{kk}$与膨胀率V_{kk}无关，则我们必须使

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{7.3-5}$$

于是本构方程变为

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3}\mu V_{kk}\delta_{ij} \qquad ▲(7.3\text{-}6)$$

这个公式是由斯托克斯(G. G. Stokes)导出的，因此服从方程(7.3-6)的流体称为斯托克斯流体，对于这种流体，一个材料常数(粘性系数)μ 就足以确定其特性。

如果流体是不可压缩的，则 $V_{kk}=0$，我们得到不可压缩粘性流体的本构方程：

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} - 2\mu V_{ij} \qquad (7.3\text{-}7)$$

如果 $\mu=0$，我们得到无粘性流体的本构方程：

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} \qquad (7.3\text{-}8)$$

静压力 p 一项的存在标志着流体力学和弹性力学之间的基本差别。为了适应这个新变量，经常假定存在着联系压力 p、密度 ρ 和绝对温度 T 之间的状态方程：

$$f(p,\rho,T) = 0 \qquad (7.3\text{-}9)$$

例如对于理想气体，方程(7.2-3)是适用的；对于实际气体可用方程(9.1-3)；对于水和海水，1988 年泰特(Tait)和 1967 年李(Li)已获求解它们的状态方程(见第九章参考文献后面部分)。由方程(7.2-5)所确定的不可压缩流体是又一特殊情况，对于这一情况压力 p 是由运动方程和边界条件所确定的变量。

服从方程(7.3-1)或方程(7.3-3)的流体称为牛顿流体，它的粘性效应由变形速率分量的线性项来表示，表现为其他情况的流体称为非牛顿流体，例如粘性系数与 V_{ij}的基本变量有关的流体是非牛顿流体(进一步讨论见 9.11 节)。

7.4 虎克弹性固体

虎克弹性固体是服从虎克定律的固体，虎克定律叙述为：应力张量与应变张量成线性比例，即

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \qquad (7.4\text{-}1)$$

式中，σ_{ij}为应力张量，e_{kl}为应变张量，C_{ijkl}是与应力或应变无关的弹

性常数张量或弹性模量张量，常数 C_{ijkl} 的张量性质遵循商的规则（见 2.9 节）。

作为一个 4 阶张量，C_{ijkl} 有 $3^4=81$ 个元素，但因为 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，故必定有

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \tag{7.4-2}$$

此外，由于 $e_{kl}=e_{lk}$ 及在方程(7.4-1)中，下标 k 和 l 是缩并的哑指标，我们总能在不改变总和的情况下使 C_{ijkl} 对于 k 和 l 对称。于是我们总能把方程(7.4-1)写成

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{ijlk})e_{kl} \\ &= C'_{ijkl}e_{lk} \end{aligned} \tag{7.4-3}$$

它具有性质：

$$C'_{ijkl} = C'_{ijlk} \tag{7.4-4}$$

只要完成了这个对称化，在(7.4-2)和(7.4-4)的条件下，C_{ijkl} 最多具有 36 个独立的常数。

如果我们记得由 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 及 $e_{ij}=e_{ji}$，从而在应力张量 σ_{ij} 和应变张量 e_{ij} 中各自只有六个独立的元素，那么就可以看到弹性常数总共不能多于 36 个。如果 σ_{ij} 的每个元素和 e_{ij} 的所有元素成线性关系或者相反，就将有六个方程，每个方程有六个常数，所以总共有 36 个常数。

对于大多数弹性固体，独立弹性常数的数目远小于 36。由于物质对称性的存在导致了这个数目减少。读者可参阅洛甫(Love)、格林(Green)和艾德金斯(Adkins)所著的关于弹性理论的经典著作。在这些书中极好地论述了这一课题，书目列在本章末。

当物质为各向同性时，即当弹性性质在所有方向相同时，弹性常数的数目减到了最少。更确切地说，物质的各向同性是由下面的要求所限定：不管坐标系统的方向如何，数组 C_{ijkl} 具有完全相同的数值。由于各向同性概念十分重要，我们将在第八章中很详细地讨论它。下面要说明，用两个独立的弹性常数就可以描述各向同性物

质的特性，各向同性弹性固体的虎克定律为

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{7.4-5}$$

常数 λ 和 μ 称为拉梅常数。在工程文献中，第二个拉梅常数 μ 实际上总是写成 G，并且等同于剪切模量。

将方程(7.4-5)写成展开形式是有益的。采用直角笛卡儿坐标 x,y,z，得到各向同性弹性固体的虎克定律：

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{xx} \\
\sigma_{yy} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{yy} \\
\sigma_{zz} &= \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{zz} \\
\sigma_{xy} &= 2Ge_{xy}, \sigma_{yz} = 2Ge_{yz}, \sigma_{zx} = 2Ge_{zx}
\end{aligned} \tag{7.4-6}$$

这些方程能够对 e_{ij} 求解。但习惯上其逆的形式写为

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\
e_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \\
e_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\
e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy}, \\
e_{yz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz}, \\
e_{zx} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zx} = \frac{1}{2G}\sigma_{zx},
\end{aligned} \tag{7.4-7}$$

或者，用指标符号表示，

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij} \tag{7.4-8}$$

常数 E，ν 和 G 与拉梅常数 λ 和 G(或 μ)有关(参见方程(9.6-9)，E 称为杨氏模量，ν 称为泊松比，G 称为剪切弹性模量或剪切模量。在一维情况下，只有应力分量 σ_{xx} 不等于零，我们已经在第五章的方程(5.1-3)和(5.1-4)中用过了这一方程的简化形式。

方程(7.4-7)很容易记住。我们想起一维情况的方程(5.1-3)。

把它用于如图 1.9 所示的简单块状物。当这个块状物在 z 方向受压时，它由于应变

$$e_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} \tag{7.4-9}$$

而缩短。与此同时块状物的侧边将稍有胀大。对于线性物质，膨胀的应变与 σ_{zz} 成比例，但符号与应力相反。即压缩引起侧向膨胀，拉伸引起侧向收缩。因此我们写出

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\ e_{yy} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \end{aligned} \tag{7.4-10}$$

这就是只有应力 σ_{zz} 不等于零的情况。如果块状物还受到 σ_{xx}，σ_{yy} 的作用，如图 3.1 所示，并且材料是各向同性和线性的（这样，原因和结果就能够线性叠迭），则 σ_{xx} 在 e_{yy}，e_{zz} 上和 σ_{yy} 在 e_{xx}，e_{zz} 上的影响必定与 σ_{zz} 在 e_{xx}，e_{yy} 上的影响相同。因此方程(7.4-9)成为

$$e_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy},$$

它是(7.4-7)诸方程中间的一个，同时可类似地得到(7.4-7)中的其他方程。剪应力和剪应变的每个分量只对其自身产生影响。

虎克定律的其他形式

对于一类各向同性弹性材料，虎克定律的形式可写成

$$\sigma_{aa} = 3Ke_{aa} \tag{7.4-11}$$

$$\sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij} \tag{7.4-12}$$

其中 K 和 G 是常数，σ'_{ij} 和 e'_{ij} 分别是应力偏量和应变偏量；即

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{aa}\delta_{ij} \tag{7.4-13}$$

$$e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{aa}\delta_{ij} \tag{7.4-14}$$

在前面我们知道，$\frac{1}{3}\sigma_{aa}$ 是某一点的平均应力，若应变是无穷小量，e_{aa} 是指单位体积内的体积变化 $u_{a,a}$ 和 e_{aa} 是不变量。这样，方程(7.4-11)指出了物质的体积变化是与平均应力值成正比，静态流

体的压缩是一个特例，即，当

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-p,\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=\sigma_{zx}=0,$$

我们有 $\sigma_{\alpha\alpha}=-3p$，就无穷小量应变而言，$V$ 和 ΔV 分别代表体积和体积的变化，则方程(7.4-11)可以写成

$$\frac{\Delta V}{V}=-\frac{p}{K} \tag{7.4-15}$$

这样，系数 K 称为物体的体积弹性模量。

应变偏量 e'_{ij} 是描述物体无任何体积变化的形变。应力偏量与应变偏量成简单的比例关系。弹性常数的关系式为

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}=\frac{G(E-2G)}{3G-E}=K-\frac{2}{3}G=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\
&=\frac{3K\nu}{1+\nu}=\frac{3K(3K-E)}{9K-E},\\
G &= \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}=\frac{3}{2}(K-\lambda)=\frac{E}{2(1+\nu)}\\
&=\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}=\frac{3KE}{9K-E},\\
\nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+G)}=\frac{\lambda}{(3K-\lambda)}=\frac{E}{2G}-1\\
&=\frac{3K-2G}{2(3K+G)}=\frac{3K-E}{6K},\\
E &= \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}=\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}=\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}\\
&=2G(1+\nu)=\frac{9KG}{3K+G}=3K(1-2\nu),
\end{aligned} \tag{7.4-16}$$

$$\begin{aligned}
K &= \lambda+\frac{2}{3}G=\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}=\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\\
&=\frac{GE}{3(3G-E)}=\frac{E}{3(1-2\nu)},\\
&\frac{G}{\lambda+G}=1-2\nu,\ \frac{\lambda}{\lambda+2G}=\frac{\nu}{1-\nu},
\end{aligned}$$

当泊松比 $\nu=1/4$ 时，$\lambda=G$。当 $\nu=1/2$，那么 $G=E/3$，$1/K=0$ 和 $e_{\alpha\alpha}=0$。

7.5 温度影响

在前面各节中，应力-应变或应力-应变率的关系是在给定的温度条件下确定的。但是流体的粘性就象固体的弹性模量那样随着温度而变化。换句话说，方程(7.3-1)中的 $\mathscr{D}_{ijkl}$、方程(7.4-1)中的 C_{ijkl}是温度的函数，并且是在等温试验下确定的系数。

热量能引起热膨胀和影响固体或液体的零应力状态。若一物体在温度 T_0 时无应力，当温度变化到 T_0，应力仍保持为零值，那么，由线性定律

$$e_{ij} = \alpha_{ij}(T - T_0) \tag{7.5-1}$$

指出物体的应变 e_{ij}与 T_0 温度时的状态相关。相反，当温度从 T_0 变到 T 时，若物体的形状被限制，保持 $e_{ij}=0$ 状态，那么，应力

$$\sigma_{ij} = -\beta_{ij}(T - T_0) \tag{7.5-2}$$

从物体产生。α_{ij}和 β_{ij}分别是当温度为 T_0 时，在零应力和零应变条件下，所测量的物质常数的对称张量。

当方程(7.5-2)和虎克定律相结合，我们得到杜哈梅尔--诺依曼(Duhamel-Neumann)的热弹性定律：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} - \beta_{ij}(T - T_0) \tag{7.5-3}$$

对于各向同性物质，二阶张量 β_{ij}必定也是各向同性的。于是 β_{ij}必定是 $\beta\delta_{ij}$的形式(见 8.2 节)。因此对于各向同性的虎克固体有

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} - \beta(T - T_0)\delta_{ij} \tag{7.5-4}$$

式中 λ 和 G 是常温下测出的拉梅常数。(更详细的情况见作者的另一本书《固体力学基础》中的第十二章，第 355 页)。

7.6 具有更复杂力学性能的物质

如前所述，无粘性流体，牛顿流体和虎克弹性固体是抽象的概念。尽管在一定的温度、应力及应变范围内，一些物质能准确地遵守这些定律当中的一个，但是还不知道有哪一种真实物质精确地

具有它们中间之一的特性。

真实物体性能是很复杂的。对于流体来说，家用的涂料和清漆是非牛顿型的，湿粘土和泥浆是非牛顿的。大多数胶性溶液也是非牛顿型的。对于固体来说，幸好大多数结构物质在常用的应力和应变范围内是虎克型的，但超出一定限度，虎克定律就不再适用。例如，实际上所有已知的固体物质在足够大的应力或应变之下都会产生不同形式的破碎，但裂开是不符合虎克定律的。

尽管如此，在连续介质力学中大量的文献是集中围绕着这些理想物质，并且结果非常有用。在第九章中我们将讨论液体和固体更复杂的特性，但是我们将把对非牛顿型，非线性弹性或非弹性固体的数学处理，留作专题讨论。

习　题　7

7.1　已知一流体，要确定它是不是牛顿型或理想型，你用什么实验能提供一个精确的答复？

7.2　流体的粘度有许多测量方法，建议用两种方法测量流体的粘度。每一种情况提出草图，解释设计方案，计算粘度系数的方法，仪器的应用，和两种仪器正反两个方面的比较。

7.3　一个土建工程师要建一大坝，则混凝土的粘弹性性能是非常重要的事情。作一个推测评估，设大坝中的混凝土是“流动”的。设计一个实验来确定混凝土的本构方程。建议设计一套测试系统。

7.4　观察在我们的厨房中的东西能更加了解物质的本构方程，取一新鲜芹菜的杆和一新鲜的胡罗卜，弯曲它们，它们脆而易断，让芹菜和胡萝卜干燥几天，然后弯曲它们，它们不会断裂，为什么？对胡萝卜和芹菜用怎样的本构方程反映所观察到的现象？

7.5　酸性面团和通心面是两种极好流变研究材料。用你的手或手指按一下它们，提出用数学推述它们的本构方程。

7.6　取一绳子和一把剪刀。如果绳子是松的和剪刀是钝的，你可以发现这绳子不容易剪断。现在，绷紧绳子后，再用剪刀剪，那么绳子就容易剪断，为什么？

7.7 一群生理学家已攀登上了世界上最高的埃佛勒斯山峰(又称珠穆朗玛峰),他们要在某一高度收集一些珠穆朗玛峰上的空气样品带回实验室,进行详细分析。你应该怎样做?请发明一方法,有人建议带一些玻璃吸管,用电流密封两端,这种方法可行吗?

7.8 获得淡水和海水的本构方程和状态方程对理解海洋生物学是非常重要的。怎样获得在很深处和宽阔的海面的海水,在实验室进行检测?很早以前完成这项工作的是泰特(P. G. Tait)见第九章后面的参考文献(泰特(1888),李(1967))。你自己设计一现代方法进行测量。

讨论关于波的运动、海洋生命,水下声学和防潜水战争数据的重要性。

7.9 火山爆发是连续介质力学的自然现象。它们包括有什么物质?它们的本构方程是什么?怎样研究这些本构方程?

7.10 在新疆(Sinkiang)和蒙古(Mongolia)的戈壁沙漠,人们常述说一种偶尔发生的可怕沙暴。沙怎样象流体一样流动?推测它的本构方程,并设计一个实验来检测。设计一种能带到沙漠进行测量的仪器。

7.11 我相信你已去过某地方的沙丘,现在,用连续介质力学的知识,以公式来表示这样一个数学问题,使能预示沙丘的形状。

7.12 地质术语如冰河流动、岩床弯曲、山脉移动、大陆碰撞等,所有这一切都与力、结构和本构方程有关。设计一些实验来研究冰、岩石、山、海底和大陆的本构方程。

7.13 我们很想知道地幔和地心的本构方程;行星,太阳和恒星的本构方程。我们怎样着手做这一事?什么样的观察才能帮助我们获得推断这些物体材料的本构方程的知识?

7.14 宇航员到了月球,从月球上带回一些岩石样品。我们对这些岩石的力学特性非常感兴趣。设计一个实验方案,从这些少量岩石中获取尽可能多的资料。

7.15 用带有遥控装置的无人驾驶火箭去探测月球。假设登月是打算研究月球表面物质的力学特性。设计一套仪器,它将能获得所需的资料。

7.16 人体的膝、臀、肘和指关节等部位的关节炎,折磨着许多人。按关节软骨的本构方程,将发生什么情况?

7.17 假设你打算建立一个生物力学实验室,从决定肌肉本构方程的观点来研究肌肉的力学特性,则制定出一系列所需研究的特性,制定出一系列所应作的实验。我可以一切实验所需仪器是不存在的。这是你进行发明的机会。要选择具有关键意义的仪器去发明。要制定草图、设计和

计算，要考虑它的可行性、价值和效益。

7.18 有三种不同类型的肌肉：骨骼肌，心肌和血管、输尿管、膀胱、子宫以及其他内部器官的平滑肌。从人体和动物身上获得的试样，其有效性是有区别的。离体样品和在体样品的测试有区别。所以对于上述问题的答案，不得不缩小到更特定的范围。作为一个研究者，这种缩小实际上是决定性的一步，它需要智慧、经验和雄心。适当的研究目标的选择将反映一个人的训练及个性。对此提出一种想法，作出你的选择，解释你的理由，并写出来，从今天开始，对其回顾一年。

7.19 在生物力学实验室，对其他组织的研究可能提出类似的问题。无生命的组织是不重要的。人们认为保持身体健康是理所当然的。认识到这一点，除肌肉外，计划研究一种组织。

7.20 每一个本构方程必须张量正确。根据这个必要条件，考虑从斯塔林假设引出一般性结论的问题。此假设在生理学上很著名，但用公式表示除压力外不考虑应力。斯塔林假设提出，水通过薄膜的速率受下面公式的控制：

$$\dot{m}=k(p_1-p_2-\pi_1+\pi_2)$$

式中$\dot{m}$是水运动的速率$(g/s/m^2)$，p_1和π_1分别是膜一侧的静水压与渗透压；p_2，π_2为另一侧的值，K是渗透性常数，单位为s/m。考虑水的运动通过血管的内皮，我们认识到流动的血液将把一个剪应力强加在膜上，而内皮细胞将以内应力对剪应力起反应。近来许多论文已报道剪应力对血管重组的重要作用，对离子和酶通过内皮传输的重要作用，可能在水的传输中起重要作用。因此，建议斯塔林定律的概念应包括膜的两侧的介质应力，并描述一个计划实验来证明这个建议。

讨论。设τ_{ij}是应力偏量的张量。由于$\dot{m}$是标量，所以任何涉及到τ_{ij}的项都必须为标量不变量的形式，例如$\tau'_{ij}\tau'_{ij}$，$\tau'_{ij}V'_{ij}$，$\tau'_{ij}e'_{ij}$或$C_{ij}\tau_{ij}$，此处的V'_{ij}是变形偏量张量的变化率，e'_{ij}为应变偏量的张量而C_{ij}为常数的张量集。因此我们可得出如下的假定关系：

$$\dot{m}=K(\Delta p-\Delta\pi)+c\Delta\tau'_{ij}\tau'_{ij}.$$

$$\dot{m}=K(\Delta p-\Delta\pi)+c\Delta\tau'_{ij}V'_{ij}.$$

$$\dot{m}=K(\Delta p-\Delta\pi)+c\Delta\tau'_{ij}e'_{ij}.$$

$$\dot{m}=K(\Delta p-\Delta\pi)+c\Delta C_{ij}\tau_{ij}.$$

这里，Δ意思是薄膜两侧上数量之差

补充读物

ERINGEN, A. C., Mechanics of Continua. New York: Wiley (1967), P. 145

GREEN, A. E., AND J. E. ADKINS, Large Elastic Deformation. oxford: University Press (1960), Chap. 1, esp. pp. 11-35

LOVE, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: University press, Ist ed. (1892), 4th ed. (1927), New York: Dover Publications (1963), Chapter 6, esp. pp. 151—165

8 各向同性

在连续介质力学中，各向同性概念常被用作一个简化假设。首先我们将定义材料各向同性和各向同性张量；然后将确定 2 阶、3 阶和 4 阶各向同性张量，并将其应用于各向同性材料的本构方程。

8.1 材料各向同性的概念

我们把力学性质不随方向而改变的这一类材料称为各向同性材料。例如，在做某金属拉伸实验时，假如发现实验结果不随拉伸试件从铸锭的切出方向而变化、并且与拉力垂直的各个方向都有相同的侧向收缩，我们可以认为该金属是各向同性的。

为了给出精确的定义，我们利用本构方程：如果某材料的本构方程（应力-应变史规律）在坐标的正交变换（第 2.4 节）之下保持不变，则该材料就是各向同性材料。例如，如果本构方程为 $\sigma_{ij}=C_{ijkl}e_{kl}$，我们要求在正交变换后该定律写为 $\bar{\sigma}_{ij}=C_{ijkl}\bar{e}_{kl}$，式中横线量对应于新坐标系。

由于正交变换是由坐标轴的平移、旋转和反射构成，因此上述定义要求不管轴是平移、旋转还是反射，本构方程的数学形式保持不变。具体地说，材料常数数组在任何右手或左手直角笛卡尔坐标中必须有相同的值。

8.2 各向同性张量

定义

如果一个张量在任一笛卡尔直角系统中的分量值不随坐标的正交变换而改变，那么该张量就是欧几里德度量空间的各向同性张量。

由定义(第 2.4 节)，以 x_1, x_2, x_3 到 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ 的正交变换为

$$\bar{x}_i = \beta_{ij} x_j + \alpha_i \quad (i = 1,2,3) \tag{8.2-1}$$

式中 β_{ij} 和 α_i 为常数，并受如下限制

$$\beta_{ik}\beta_{jk} = \delta_{ij} \tag{8.2-2}$$

如果把某一右手坐标轴系统变换成另一右手系统，这个正交变换称为**正常变换**。对一个正常变换，雅可比行列式必定为正值(参见第 2.5 节)。对于正交变换(8.2-1)，根据方程(8.2-2)，雅可比行列式 $|\beta_{ij}|$ 必定为 ± 1。因此，对于正常的正交变换，必定有

$$\det|\beta_{ij}| = 1 \tag{8.2-3}$$

例如，所有坐标轴的旋转是正常变换，但对于 x_2x_3 平面的反射，

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -x_1, \\ \bar{x}_2 = x_2, \\ \bar{x}_3 = x_3, \end{cases} \qquad (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |\beta_{ij}| = -1 \tag{8.2-4}$$

是非正常的正交变换，它把右手系统转变为左手系统。

各向同性张量和各向同性材料的关系

我们将证明，如果关系式

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \tag{8.2-5}$$

是各向同性的，那么 C_{ijkl} 是各向同性张量。

证明：根据商规则（第 2.9 节），C_{ijkl}是一个 4 阶张量。因此，C_{ijkl}的变换服从张量变换的规则。现在，把方程(8.2-5)变换到新坐标 $\bar{x}_i$ 中，我们有

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}\bar{e}_{kl} \tag{8.2-6}$$

但是材料各向同性的定义要求

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{e}_{kl} \tag{8.2-7}$$

因此，通过(8.2-6)和(8.2-7)两个方程的比较，我们得到

$$\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl} \tag{8.2-8}$$

于是 C_{ijkl}是各向同性张量。

0 阶、1 阶和 2 阶各向同性张量

当然所有的标量都是各向同性的。但不存在 1 阶的各向同性张量。因为，当向量 A_i 是各向同性时，对于所有可能的正交变换它都必须满足方程

$$\bar{A}_i = A_i = \beta_{ij}A_j \tag{8.2-9}$$

具体地说，对于绕 x_1 轴旋转 180°的情况，我们有

$$\begin{cases}\bar{x}_1 = x_1, \\ \bar{x}_2 = -x_2, \\ \bar{x}_3 = -x_3,\end{cases} \qquad (\beta_{ij}) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \tag{8.2-10}$$

方程(8.2-9)变为

$$A_1 = A_1, A_2 = -A_2, A_3 = -A_3。$$

因此，$A_2 = A_3 = 0$。类似地，采用同样的过程但改变 x_1, x_2, x_3 的顺序排列，我们得到 $A_1 = 0$。于是就证明了 1 阶各向同性张量不存在。

对于 2 阶张量，克罗内克符号(Kronecker delta)δ_{ij}是一个各向同性张量，因为

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_{ij} &= \beta_{im}\beta_{jn}\delta_{mn} \quad \text{(由张量的定义)}\\ &= \beta_{im}\beta_{jm} \quad (\text{因为 } m \neq n \text{ 时 } \delta_{mn} = 0)\\ &= \delta_{ij} \quad [\text{由方程(8.2-2)}]\end{aligned}$$

我们要证明每一个 2 阶各向同性张量均可化为 $p\delta_{ij}$ 的形式，此处 p 是标量。

为了证明这一点，我们首先注意到只要张量 B_{ij} 是各向同性张量，它必须是对角张量。因为，像方程(8.2-10)那样绕 x_1 轴旋转 180°，我们就得到

$$\overline{B}_{12} = \beta_{1m}\beta_{2n}B_{mn} = -B_{12}。$$

但各向同性要求 $\overline{B}_{12} = B_{12}$。因此，$B_{12}=0$。类似地，如果 $i\neq j$，则 $B_{ij}=0$。因此，B_{ij} 是对称的和对角的。

其次，令 ϵ_{ijk} 为置换张量，并考虑变换

$$\overline{x}_j = (\delta_{ij} + \mathrm{d}\theta \in_{3ij})\chi_i,$$

$$(\beta_{ij}) = (\delta_{ij} + \mathrm{d}\theta\epsilon_{3ij}) = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{d}\theta & 0 \\ -\mathrm{d}\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (8.2\text{-}11)$$

它表示绕 x_3 轴旋转了一个无限小的转角 $\mathrm{d}\theta^+$。张量的定义提供了如下关系式

$$\begin{aligned}\overline{B}_{ij} &= (\delta_{im} + \mathrm{d}\theta\epsilon_{3im})(\delta_{jn} + \mathrm{d}\theta\epsilon_{3jn})B_{mn} \\ &= \delta_{im}\delta_{jn}B_{mn} + \mathrm{d}\theta(\epsilon_{3im}\delta_{jn}B_{mn} + \epsilon_{3jn}\delta_{im}B_{mn}) - \mathrm{d}\theta^2\epsilon_{3im}\epsilon_{3jn}B_{mn} \\ &= B_{ij} + \mathrm{d}\theta(\epsilon_{3im}B_{mj} + \epsilon_{3jn}B_{in}) + O(d\theta^2) \quad (8.2\text{-}12)\end{aligned}$$

但如果 B_{ij} 是各向同性的，我们必须有 $\overline{B}_{ij}=B_{ij}$。因此，对于一个小而任意的 $d\theta$，我们必须有

$$\epsilon_{3im}B_{mj} + \epsilon_{3jn}B_{in} = 0 \quad (8.2\text{-}13)$$

取 $i=1, j=1$；则有

$$\epsilon_{312}B_{21} + \epsilon_{312}B_{12} = B_{21} + B_{12} = 0$$

但是我们已经在前面证明，B_{ij} 是对称的。因此 $B_{12}=B_{21}=0$。这与我们前面所学得的一致，并没有增加任何新的知识。

取 $i=1, j=2$；则有

$$\epsilon_{312}B_{22} + \epsilon_{321}B_{11} = B_{22} - B_{11} = 0$$

因此 $B_{11}=B_{22}$。显而易见，绕 x_1 轴完全类似的旋转将得出 $B_{23}=0$，$B_{22}=B_{33}$，同时绕 x_2 轴的旋转将得出 $B_{31}=0$，$B_{33}=B_{11}$。因此，各向

同性张量 B_{ij}可简化为 $B_{11}\delta_{ij}$的形式。把 B_{11}写成 p，我们得到 $B_{ij}=p\delta_{ij}$。

现在通过重复绕坐标轴的无限小旋转可以完成从一个直角笛卡尔坐标系到另一坐标系的任意旋转。因此，前面所检验的各条件是由各向同性对于正常的正交变换所施加的唯一条件。所以，对所有正常正交变换，有 $B_{ij}=p\delta_{ij}$。

在 x_2x_3 平面内的反射，即方程(8.2-4)，不会改变 2 阶各向同性张量 $p\delta_{ij}$的值。通过对任意旋转的论证我们作出结论：在任一平面内的反射不影响它的值。因此，上述我们得到的形式对于所有正交变换是各向同性的。证毕。

见旋转矩阵方程(2.4-5)，并且注意到当 θ 很小时，$\cos\theta\approx1$，$\sin\theta\approx0$。认为此处的 $d\theta$ 和第 2.4 节中的角 θ 相等，就提供了方程(8.2-11)变换的几何解释。

上述证明源于杰夫内斯(Jefferegs)，参见本章末所附参考文献。注意到对于一个各向同性张量，可以用任意的次序来标明坐标轴。于是，指标 1,2,3 的循环置换就不会影响对于坐标轴旋转为各向同性的张量的分量值。因此，$B_{12}=0$ 就意味着 $B_{31}=0$。如果张量对于反射也是各向同性的，则指标 1、2、3 的任意置换都不影响分量值。利用这些讨论可简化证明过程。

8.3 3 阶各向同性张量

对于 3 阶张量，我们能够证明置换张量 ϵ_{ijk}对于坐标轴的旋转(正常正交变换)是各向同性的。它对于一个坐标平面内反射不是各向同性的。因为像方程(8.2-4)那样的的反射会把 $\epsilon_{123}=1$ 变为 $\bar{\epsilon}_{123}=-1$。

我们能够证明：对于所有的坐标旋转，唯有 3 阶各向同性张量是 ϵ_{ijk}的数量倍数。这一证明可像 2 阶张量那样作出。设 u_{ijk}为 3 阶各向同性张量，考虑到绕通过原点的任意 ξ 轴(具有分量 ξ_k 的一个向量)的一个无限小的转角 $d\theta$：

$$\bar{x}_j = (\delta_{ij} + \mathrm{d}\theta\xi_k\varepsilon_{ijk})x_i \quad (8.3\text{-}1)$$

然后，根据张量变换规律，

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ijk} &= (\delta_{im} + \mathrm{d}\theta\xi_s\varepsilon_{sim})(\delta_{jn} + \mathrm{d}\theta\xi_s\varepsilon_{sjn})(\delta_{kp} + \mathrm{d}\theta\xi_s\varepsilon_{skp})u_{mnp} \\ &= u_{ijk} + \mathrm{d}\theta\{\xi_s\varepsilon_{sim}u_{mjk} + \xi_s\varepsilon_{sjn}u_{ink} + \xi_s\varepsilon_{skp}u_{ijp}\} + O(\mathrm{d}\theta^2)。\end{aligned}$$

由各向同性，$\bar{u}_{ijk} = u_{ijk}$；因此对于小的 $\mathrm{d}\theta$，大括弧中的量必定为零（我们可以忽略高阶量）。于是，对所有的 i,j,k 有

$$\xi_s\varepsilon_{sim}u_{mjk} + \xi_s\varepsilon_{sjn}u_{ink} + \xi_s\varepsilon_{skp}u_{ijp} = 0 \quad (8.3\text{-}2)$$

取 $i=j=1$。则有

$$\begin{aligned}-\xi_2u_{31k} + \xi_3u_{21k} - \xi_2u_{13k} + \xi_3u_{12k} + \xi_s\varepsilon_{sk1}u_{111} \\ + \xi_s\varepsilon_{sk2}u_{112} + \xi_s\varepsilon_{sk3}u_{113} = 0\end{aligned} \quad (8.3\text{-}3)$$

现在取 $k=2$。那么，由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是任意的，它们的系数必须为零，从而我们得到

$$\begin{aligned} u_{212} + u_{122} &= u_{111} \\ u_{312} + u_{132} &= 0 \\ u_{113} &= 0 \end{aligned} \quad (8.3\text{-}4)$$

如果 i,j,k 中有两个相等而第三个不等，则由上述方程及对称性可得 $u_{ijk}=0$。而后，如 i,j,k 全都相等，根据(8.3-4)的第一个方程，u_{ijk}亦为零。第二个方程表明

$$u_{ijk} = -u_{jik}$$

如果在方程(8.3-3)中，我们使 $k=1$，则每一项都为零，未得出新的信息。

最后研究方程(8.3-2)中 i,j,k 完全不同的情况。我们注意到当 $m=j$ 时 u_{mjk}为零。于是可以见到，由于所有的系数为零，方程(8.3-2)有效。由此可见唯有三阶各向同性张量（对旋转的各向同性而不是对反射的各向同性）是 ε_{ijk}的数量倍数。证毕。

8.4 4阶各向同性张量

4阶各向同性张量对于材料的本构关系是有特殊的意义。很

容易看出，由于单位张量 δ_{ij} 为各向同性，所以张量

$$\delta_{ij}\delta_{kl}, \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}, \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} = \varepsilon_{sij}\varepsilon_{skl} \tag{8.4-1}$$

为各向同性。我们打算证明：如果 u_{ijkl} 是 4 阶各向同性张量，那么它必定可表示为如下的形式

$$\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \gamma(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{8.4-2}$$

式中，λ、μ、γ 是数量。此外，如果 u_{ijkl} 具有对称性

$$u_{ijkl} = u_{jikl}, u_{ijkl} = u_{ijlk} \tag{8.4-3}$$

那么

$$u_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{8.4-4}$$

证明：我们将得出相对于坐标轴旋转和对坐标而反射均为各向同性的结果。

首先，我们注意到可以用任一次序来标明坐标轴。于是，指标 1，2，3 的置换不会影响各向同性张量的分量值。因此，

$$\begin{aligned}
&u_{1111} = u_{2222} = u_{3333}, \\
&u_{1122} = u_{2233} = u_{3311} = u_{1133} = u_{2211} = u_{3322}, \\
&u_{1212} = u_{2323} = u_{3131} = u_{1313} = u_{2121} = u_{3232}, \\
&u_{1221} = u_{2332} = u_{3113} = u_{2112} = u_{3223} = u_{1331}。
\end{aligned} \tag{8.4-5}$$

其次，我们注意到：绕 x_1 轴作 180°旋转，即对应于方程(8.2-10)所给出的变换，改变了带指标 1 的奇数项的符号。但是由于各向同性，这些项一定不能改变符号。因此，它们为零。例如，

$$u_{1222} = u_{1223} = u_{2212} = 0。 \tag{8.4-6}$$

根据对称性，该结论对任一指标 i 都是正确的。

上述条件把数值不同、数目很大的 4 阶各向同性张量分量 u_{ijkl} 减少到四个，即 u_{1111}，u_{1122}，u_{1212}，u_{1221}。

现在，让我们利用一下方程(8.2-11)给出的变换，即绕 x_3 轴作无限小旋转，张量变换规律要求

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{pqrs} = u_{pqrs} + \mathrm{d}\theta\{&\varepsilon_{3ip}u_{iqrs} + \varepsilon_{3iq}u_{pirs} + \varepsilon_{3ir}u_{pqis} \\
&+ \varepsilon_{3is}u_{pqri}\} + O(\mathrm{d}\theta^2)
\end{aligned} \tag{8.4-7}$$

因为对于一个各向同性张量，$\bar{u}_{pqrs} = u_{pqrs}$，所以大括弧内的各项必

定为零，

$$\varepsilon_{3ip}u_{iqrs}+\varepsilon_{3iq}u_{pirs}+\varepsilon_{3ir}u_{pqis}+\varepsilon_{3is}u_{pqri}=0。\tag{8.4-8}$$

因为对于四个指标 p、q、r、s 的每个指标只可能有三个值(1,2,3)，所以它们当中至少有两个相等。因此，我们可以分别研究如下情形：(a)四个全相等，(b)有三个相等，(c)两个相等而另外两个不等，(d)两两相等。

在情形(a)中，取 $p=q=r=s=1$，则我们看到：根据方程(8.4-6)，方程(8.4-8)中所有项均为零。类似地，$p=q=r=s=2$ 或 3 不提供新信息。

在情形(b)中，取 $p=q=r=1$，$s=2$。我们得到

$$-u_{2112}-u_{1212}-u_{1122}+u_{1111}=0\tag{8.4-9}$$

使 $p=q=r=2$，$s=1$ 得不出新的信息，因为这仅仅相当于把指标 1 和 2 交换一下，这在方程(8.4-5)中已经考虑到了。由于 $p=q=r=s=3$ 时 ε_{3ip}项为零，所以这种情形价值不大。

从情形(c)和情形(d)可得出在方程(8.4-5)和(8.4-6)中所包含的条件。

由于重复绕坐标轴的无限小旋转能够得到从一个直角坐标到同一原点的另一坐标系的旋转，所以对各向同性而言不需要再在 u_{pqrs}上增加任何新的条件。

现在设

$$\begin{aligned}u_{1122}&=\lambda\\u_{1212}&=\mu+\nu\\u_{2112}&=\mu-\nu\end{aligned}\tag{8.4-10}$$

那么，方程(8.4-9)指出，

$$u_{1111}=\lambda+2\mu\tag{8.4-11}$$

因而出现了三个独立的 4 阶各向同性张量，依次把 λ，μ，ν 中的某一个取为 1，而其他的取为零，就能够得到这些张量。

对于 $i=j$，$k=l$，取 $\lambda=1$，$\mu=\nu=0$ 所得到的张量具有分量 $u_{ijkl}=1$，而其他所有情形的分量均为零。因此，它等价于

$$u_{ijkl}=\delta_{ij}\delta_{kl}。\tag{8.4-12}$$

对于 $i=k,j=l,i\neq j$，及 $i=l,j=k,i\neq j$，取 $\mu=1,\lambda=\nu=0$ 所得的张量具有分量 $u_{ijkl}=1$；而如果 $i=j=k=l,u_{ijkl}=2$。其他分量均为零。这就恰好是

$$u_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}。\qquad (8.4\text{-}13)$$

当 $i=k,j=l,i\neq j$ 时，取 $\lambda=\mu=0,\nu=1$ 所得的张量具有分量 $u_{ijkl}=1$；当 $i=l,j=k,i\neq j$ 时，$u_{ijkl}=-1$。所有其他分量均为零。因此，

$$u_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}。\qquad (8.4\text{-}14)$$

因此方程(8.4-2)给出了4阶各向同性张量的一般形式。在方程(8.4-3)所给出的对称条件下，由方程(8.4-2)可得到方程(8.4-4)。证毕。

8.5 各向同性材料

如果某弹性固体材料是各向同性的，则方程(8.1-1)，

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}e_{kl}，\qquad (8.5\text{-}1)$$

中的张量 C_{ijkl} 必定是各向同性张量(第8.2节)。进一步地，已一般性地证明了：由于应力张量是对称的，故 $C_{ijkl}=C_{jikl}$；由于应变张量是对称的，故 $C_{ijkl}=C_{ijlk}$；和式 $C_{ijkl}e_{kl}$ 可以不失一般性地对称化。因此，根据方程(8.4-4)，

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\qquad (8.5\text{-}2)$$

方程(8.5-1)变成

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}。\qquad (8.5\text{-}3)$$

对于应力为应变的线性函数的各向同性弹性固体而言，这是应力—应变关系的最普遍形式。因而，一各向同性弹性固体是由两个材料常数 λ 和 μ 来表征的。

类似地，一各向同性粘性流体是由如下关系来决定的

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda V_{kk}\delta_{ij}+2\mu V_{ij}。\qquad (8.5\text{-}4)$$

8.6 应力和应变主轴的一致性

弹性体(或粘性流体)的各向同性的一个重要属性就是其应力主轴和应变(或应变率)主轴相一致。这一点可以由方程(8.5-3)或(8.5-4)得到,因为应力和应变主轴的方向余弦分别为下列方程的解(第 4.5 节和第 5.7 节)

$$(\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij})\nu_j=0,\ |\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}|=0, \tag{8.6-1}$$

$$(e_{ij}-e\delta_{ij})\nu_j=0,\ |e_{ij}-e\delta_{ij}|=0。 \tag{8.6-2}$$

根据方程(8.5-3),方程(8.6-1)成为

$$(\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}-\sigma\delta_{ij})\nu_j=0, \tag{8.6-3}$$

或

$$2\mu(e_{ij}-\sigma'\delta_{ij})\nu_j=0 \tag{8.6-4}$$

σ'是引入的一个新变量

$$\sigma'=\frac{\sigma-\lambda e_{kk}}{2\mu}。 \tag{8.6-5}$$

但方程(8.6-4)和方程(8.6-2)具有完全相同的形式。因此,尽管特征值(主应力和主应变)不同,但是由解 ν_j 所给出的主方向是相同的。

还有许多其他方法来确认应力和应变主方向的一致性。例如,我们在莫尔构图(第 4.8 节)中确认:主轴和 x 轴之间的角度与圆心位置无关。如果园心平移到原点,就能确定主角度。而只要使 $\sigma_{kk}=0$,$e_{kk}=0$,我们就能实现这一平移。在此条件下,应力—应变关系变为下列的简单形式:

$$\sigma'_{ij}=2\mu e'_{ij}$$

由于 2μ 只不过是一个数值因子,因此主方向就显然一致了。

8.7 表征各向同性的其他方法

还有许多其他方法用以表征各向同性。例如,通过应变能函数

$W(e_{11},e_{12},\cdots,e_{33})$就可以确定弹性体的特性。$W$ 是应变分量的函数，并且它通过关系式

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \tag{8.7-1}$$

确定应力分量。各向同性可叙述为如下事实：应变能函数只取决于应变的不变量。例如，利用应变不变量

$$I_1=e_{ii},$$

$$I_2=\frac{1}{2}e_{ij}e_{ji}, \text{或} I_2=\frac{1}{2}e'_{ij}e'_{ji}$$

$$I_3=\frac{1}{2}e_{ij}e_{jk}e_{ki},$$

我们可以把 $W(e_{11},e_{12},\cdots,e_{33})$确定为一个函数

$$W(I_1,I_2,I_3)。 \tag{8.7-2}$$

由于不变量在所有的坐标旋转下均保持它们的形式(和数值)，这个同样的属性适用于方程(8.7-1)。

8.8 能否由材料的微结构确定其各向同性

当参考构架旋转时，材料的应力—应变关系保持不变，则该材料被认为是各向同性的。如果从某一各向同性材料上切下一段试样，做一次实验(例如，一段条形试样做拉伸实验，一段块状试样做压缩实验，一段梁做弯曲实验，一段轴做扭转实验，一块平板做二维加载实验，一块带孔或槽口的平板做应力集中或疲劳强度实验，或是一立方体或圆柱体做三维加载实验，则不管从何方向切下试样，所得到的与应力和应变相关的测试结果应该是相同的；只要根据第 1.5 节和第 1.6 节所讨论的极限概念，试样的尺寸足够大而使得应力和应变便于确定即可。如果该材料在空间上是非均匀的，从而使得其力学特性随位置不同而变化，则通常可行的方法是将试样切得足够小以便可将每段试样视为均一的。这一愿望在某些情形下难以实现；例如，在生物学中，皮肤，血管壁，及细胞膜均为多层材料，其不同的层面具有不同的力学特性，但一般来说，不可

能通过外科手术将这些层面剥脱开而不损伤组织。

现在，人们可利用光学显微镜或电子显微镜或 X 射线散射机，核磁共振装置，或正电子仪来考察材料的结构。随着分辨能力的提高，可以逾越第 1.6 节所讨论的有关应力和应变的定义中对尺寸所允许的下限。然而，在小于确定应力和应变的下限尺度下，超微结构的精细情况与材料的力学特性无关。但是，我们常常对认识材料的超微结构有兴趣，以期获得对材料力学特性更广泛的了解。有时甚至能够从更小尺度水平的超微结构推导出给定尺度范围的材料本构方程。为说明这种方法，让我们考虑如下一些例子。

例 1　具有立方晶格的晶体

考察一个原子排列如图 8.1 所示立方晶格的晶体。令立方体每边长度为一个测量单位。取直角参考构架 (x_1, x_2, x_3)，使该材料受到用如下张量形式表示的应力的作用

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}。\tag{8.8-1}$$

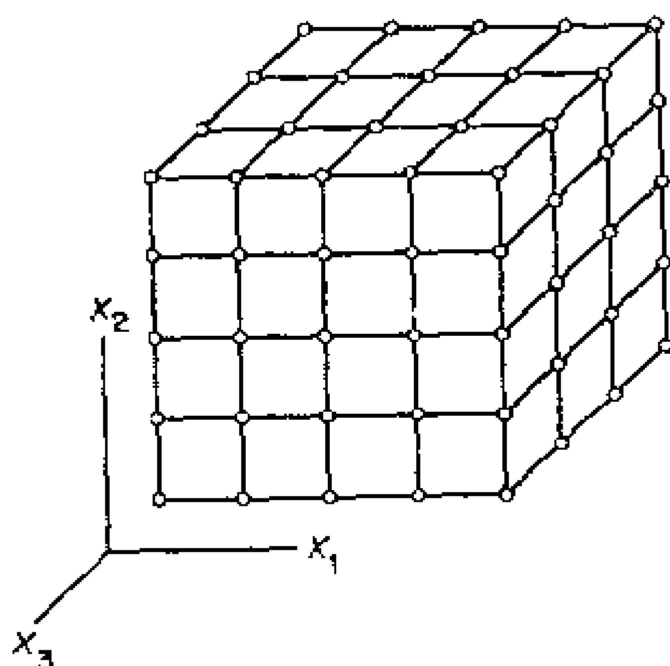


图 8.1　原子排列成立方晶格的晶体的力学模型

晶体随应力而发生变形。具体地说，晶体由于 σ_{11} 的作用在 x_1 方向上伸长而由于 σ_{22} 和 σ_{33} 的作用在 x_1 方向缩短。假定在理论上或从实验中发现

$$e_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}),\tag{8.8-2}$$

$$e_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{33} + \sigma_{11}), \qquad (8.8\text{-}3)$$

及

$$e_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})。 \qquad (8.8\text{-}4)$$

则切应力 σ_{ij}产生了切应变 e_{ij}。现在，我们能否断言晶体的力学特性是各向同性的？一般而言，答案是否定的。这里有三个材料常数：E，ν，及 G。根据第 8.5 节，各向同性的本构方程只能有二个独立常数。事实上，假如应力—应变关系是各向同性的，那么常数 G，E，及 ν 必将由如下方程而联接起来：

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad (8.8\text{-}5)$$

(见方程(7.4-16))。假如实验结果证明方程(8.8-6)成立，那么方程(8.8-1)到(8.8-6)在一特定坐标系中与各向同性本构方程相一致。然而，在这种情形下我们可以得出更多的结论，因为任意笛卡尔参考构架都能通过平移和旋转而变换成如图 8.1 的晶体构架，在任意参考构架中的应力张量都能转化晶体构架中方程(8.8-1)的形式。因此，我们可以说，假如方程(8.8-6)成立，那么由原子排列成立方晶格而构成的材料是各向同性的。

例 2　肺组织

正常肺组织是一个集合式结构，如同多孔泡沫橡皮一样(见图 1.3～图 1.6)。由冯(1988)提出并经详细论证的肺微结构模型如图 8.2。气道的每一终末单元称为肺泡。形状和大小相同的肺泡的集合充满整个肺部空间。肺泡壁称为泡间隔，它们是薄薄的膜，其间如三明治一样包有毛细血管。肺毛细血管占有泡间隔夹层空间的 80%。良好的肺泡模型是一个 14 边的 14 面体或 14 面体。包围一个中心为 14 面体的十四个 14 面体，壁面均相互贯穿，形成一个二阶 14 面体，成为肺泡通道的基本单元。二个或三个基本单元连结起来，其中贯穿适当数目的泡间隔用于空气流通，从而形成肺泡通道的分枝。肺泡通道与支气管相通，支气管与主支气管、气管相通，最后到达鼻和嘴。肺组织是一阶和二阶 14 面体的集合体。

对于这样一种结构，应力可定义在直径远远大于单个肺泡直径的区域。（对于人类，肺泡直径大约为 100～300μm；因此，$1cm^2$ 的平面区域内将横切 1000～10000 个肺泡，在这样一个区域内应力可以定义得非常好。）类似地，应变可以定义在体积为 $1cm^3$ 量级的单元体上。

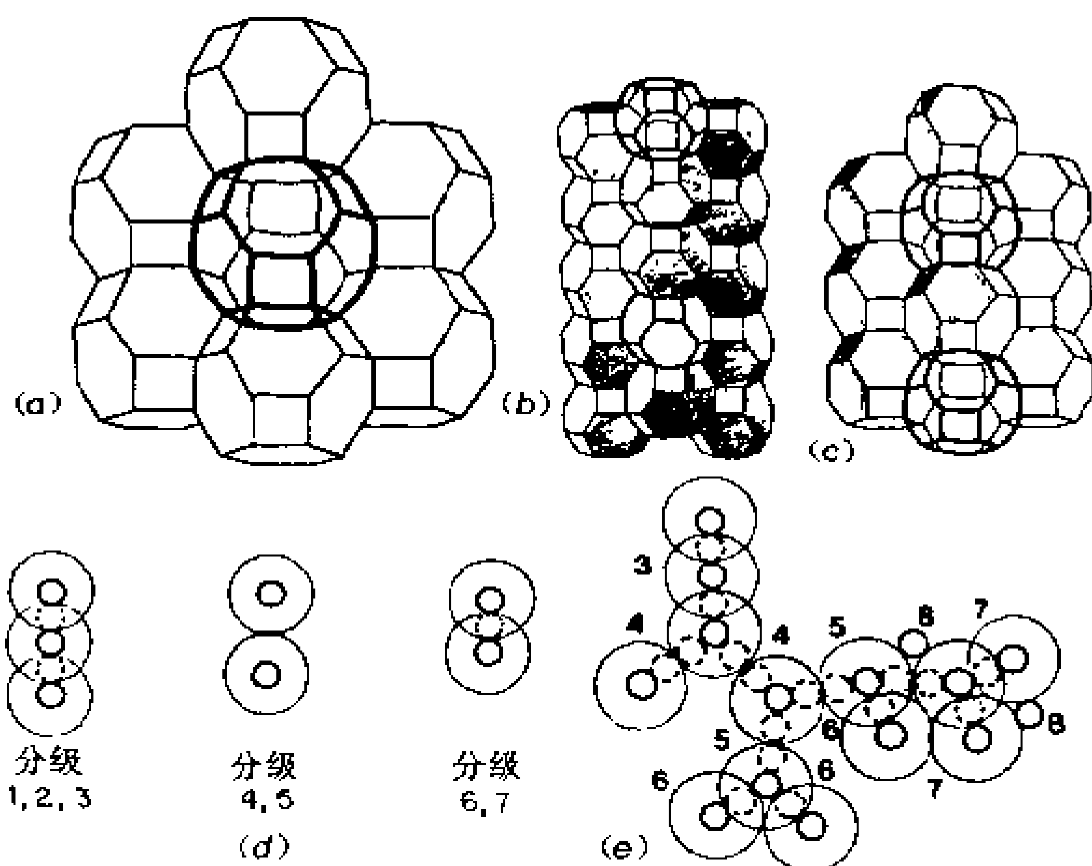


图 8.2 肺泡通道的数字模型

根据 Y. C. Fung, "*A Model for the Lung Structure and Its Validation*", J. Appl. Physiology, 64 (5): 2132－41, 1988. (*a*)肺泡通道基本单元，由十四个 14 面体围绕一个中心 14 面体组成，其间无壁面分隔开。每一壁面是肺泡膜或泡间隔；(*b*)二个单元相互堆积，接触面肺泡膜被贯穿，从而形成较长的通道；(*c*)两个基本单元通过贯穿更多一些的共用肺泡膜形成较短的通道；(*d*)第 1,2,3 级肺泡通道由三个基本单元组成，每相邻两个基本单元结构部分如(*c*)。第 4 和第 5 级通道为如(*b*)所示单元。第 6 和第 7 级通道为如(*c*)所示单元；(*e*)由各级通道形成的通道树。由第 8 级给出的大量单个 14 面体单元充满整个空间。肺组织由这些树形结构充满，并收敛为支气管，尔后为主支气管，最后为气管

在肺中，每一泡间隔是由毛细血管和连接组织构成，连接组织的主要结构成分是胶原纤维和弹性纤维。为了维持这种结构的整

合性，用于空气流通的泡间隔边缘可见到有附加的胶原纤维和弹性纤维加以增强。在人肺中这些胶原纤维和弹性纤维的数量、尺寸及曲率已经得到测量(参见 Fung, Biomechanics, 1990[1], pp. 405—416。)在应力作用下，这些胶原纤维和弹性纤维发生变形，从而产生了整个肺组织的应力—应变关系。这样一个关系有利于了解在正常生活中的重力载荷下，在空间飞行中的零重力下，在运动时的加速度下，和在疾病条件，以及分析肺中空气流动分布和血流时的应力和应变分布。

不管肺组织的几何结构多么复杂，其基本的体积对称性是清楚的，因为每一 14 面体均由切割立方体的八个角而得到，并且集合体保持了固有的立方体特性。从例 1 中可以得出，在小应变、线性范围内，肺的应力-应变关系可以是，但不一定是，各向同性的，取决于剪切模量，杨氏模量和泊松比是否满足方程(8.8-6)。

然而，肺组织能够产生大变形，并正常地工作在与零应力条件有关的有限应变范围内。对于有限应变而言，肺组织的本构方程是非线性的。然而，有关零应力状态附近初始各向同性的知识可长期使用，因为如果肺组织在线性、小应变范围内是初始各向同性的，那么它在非线性的有限应变范围内也是初始各向同性的。

习题 8

8.1 区别均匀性和各向同性两个词。研究地球的大气：

(a)如果你所考虑的是一个高空探测火箭，你认为大气是均匀的还是各向同性的？

(b)如果一个火箭以不产生激波的速度飞行，而问题涉及到紧靠火箭周围的流动，应把空气处理为均匀的还是各向同性的？

(c)如果在(b)部分的问题中产生了激波，又将会怎样？

8.2 证明在第 8.4 节中已证过的定理可改写为"4 阶各向同性张量最一般的形式为

$$u_{ijkm} = \alpha\delta_{ij}\delta_{km} + \beta\delta_{ik}\delta_{jm} + \gamma\delta_{im}\delta_{jk},$$

式中 α, β, γ 为常数。

8.3 证明张量 $\epsilon_{ijk}\delta_{lm}$ 是各向同性张量。还有其他 5 阶各向同性张量吗?

8.4 建立一些 6 阶各向同性张量。推广到偶数 $2n$ 阶的各向同性张量。

8.5 指出三种非各向同性的流体。

8.6 指出五种非各向同性的固体。

8.7 各向同性是本构方程的特征。因此,各向同性的实验测试需要使用相同的装置和仪器来确定力学特性。设想要求你确定某一金属是否为各向同性的。设计一个测试程序以使你能提供一个确切的回答。

8.8 假如让你考虑一种生物材料,如人的皮肤,所需的测试程序多半不同于测试金属的程序。皮肤在三个方向上明显是非各向同性的。但它却是一种很好的"横截"各向同性:在其平面上是各向同性的。对皮肤设计一种新的测试程序。

8.9 对于象混凝土和塑料的工业材料而言,了解材料是否为各向同性对设计者非常重要。设想你正在建立一个实验室,用于测试结构材料。提出实验计划并说明所需的仪器。

8.10 单晶体通常是各向异性,但多晶体材料可以是各向同性的。单个长链分子是各向异性的,但高分子流体和固体可以是各向同性的。以第 1.5 节所讨论的在特定最小定义尺度下对连续介质的定义的观点和材料结构的统计学特征来解释该现象。

从理论上看,是否可能将基于材料结构的各向同性的某些规则公式化?在多晶体金属中,晶粒边界的材料通常是非晶形的,而且必须考虑到位错和双晶。在高分子材料中,必须考虑到分子结构。

8.11 各向同性材料可以通过机械方法制成各向异性的,如滚轧,锤击,喷丸硬化,爆炸成型,拉伸,拉丝。用统计学论点解释这种变化。设计一套实验装置测试这些结果。

8.12 通过滚轧、挤压或锻造对合金实行冷加工,将发生变形或破坏晶体,产生新的晶粒界面,引起较大的位错运动并产生新的错位。持续的热处理能改变晶体的形状,晶粒界面,晶体结构及固体杂质溶解度(如在钢中的碳)。这些过程是否将改变在比例极限下(在线性范围内)的应力—应变关系?杨氏模量,泊松比及剪切模量是否受到影响?通过冷加工和热处理屈服点是否改变? 失效的极限应力是否受到影响?

8.13 对于满足虎克定律的材料,测试各向同性的实验程序应包括涉及正应力的一些实验和涉及剪应力的另一些实验;此外还将检验剪切模量、杨氏模量和泊松比之间的关系是否满足。现在,把我们的注意力转移

到不服从虎克定律的材料上，如人的皮肤。这种应力—应变关系是非线性的。我们可以通过怎样一个测试程序来确定各向同性？

8.14 材料的各向同性有时由于在测试试样内的残余应力而混淆不清。残余应力是无外加载荷作用于试样时存在于试样内部的应力，可以由过去的塑性变形，焊接，杂质嵌入，或其他过程给出。将一颗铁钉打入木头，残余应力就留在木头内。将一根导线弯曲成环形，焊接环的端部，就将残余应力留在环内。将钛合金锻造成喷气发动机的叶片，就将残余应力留在钛制叶片内。

如果应力—应变关系是线性的，并且位移无穷小，那么控制该连续介质的平衡方程或动力方程是线性的，并且解的叠加原理适用。在这种情形下，具有残余应力的物体对给定载荷的响应与无残余应力的同一物体对同一载荷的响应相同。换言之，假如物体的材料是各向同性的，那么有关载荷—偏移量的测量将表现出各向同性而不管是否有残余应力。

假如应力-应变关系是非线性的，则情况有所不同。解释这种非线性情形。我们还希望知道对于非线性材料，其基本的应力－应变关系是否是各向同性的，至少在零应力状态附近。我们应该怎样做？针对非线性情形制定一个计划。

8.15 在复合材料中，有些成分受拉，另一些成分受压，整体处于平衡状态，其残余应力是得到改良机械性能的一种良好途径。例如，预应力钢筋加强的混凝土和高强度纤维加强的金属材料及塑料是重要的结构材料。如果需要得到复合材料的各向同性或横截各向同性（在远远大于单根纤维直径的尺度下），则纤维必须放置成某种需要的几何形态。设计一种以高强度和各向同性为目的的复合材料。

8.16 生物体将细胞作为其基本结构。细胞膜和应力纤维（肌动蛋白分子）可在细胞水平上包含了针对压力（压缩残余应力）的拉伸残余应力。细胞间间质空间内的基质材料可受到拉伸、压缩，或剪切的应力作用。活组织的整体力学特性（在远远大于单个细胞尺寸的尺度下）取决于组织的细胞结构。考虑到细胞的三维几何形态来讨论组织的各向同性或各向异性。考虑到残余应力的强度，例如，细胞的肿胀程度，来讨论组织的整体力学特征。

8.17 体内动物细胞依赖于血液循环供给氧气。因而血管是可渗透的：循环系统供血给数微米距离范围内的每一个活细胞。考虑一段尺寸远远大

于血管直径的组织。血压和血管壁中的应力可视为组织的残余应力。组织的整体力学特性(在远远大于血管直径的尺度下)将取决血管系统受到怎样的压力作用,例如,血管壁受到怎样的应力作用。血管系统是一连续的中空器官。根据这一观点,讨论组织力学特性与血压的相关关系。考虑到血管系统的几何形态来讨论组织的各向同性。

8.18 任何对各向同性的测试是对不存在方向差异性假设的验证。因此,它必须符合统计学规律。何为实验的统计学设计准则?这些准则怎样应用于所计划的对现有问题的测试?

补充读物

FUNG, Y. C., *Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth*. New York: Springer-Verlag(1990), Chapter 11.

JEFFREYS, H., Cartesian Tensors. Cambridge: University Press(1957), Chapter7.

THOMAS, T. Y., Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry. New York: Academic Press(1961), pp. 65-69.

9 真实流体和固体的力学性质

在本章中，我们将考虑实际物质，以便了解在第7和第8章中的理想本构方程如何适应现实世界。我们将以分子观点出发、从气体和流体入手。然后我们将考虑固体，粘弹性体和生物物质。

9.1 流 体

流体基于其压力一体积关系通常分为气体或液体。在图9.1中表示了二氧化碳在恒温下压力一体积关系的典型实例。在某些特定压力值下，较低的曲线有一水平台阶。在平台的左侧为液体状态，该处要增加很大的压力才能引起很小的体积变化。平台的右侧为蒸汽或气体状态。水平台阶(如图9.1中的AB)上的一个点实际上代表了由液体和蒸汽的混合物所组成的不均匀状态。在31.05℃，CO_2液体一蒸汽等温线中的水平部分缩减到零。当温度高于这个临界值时，等温线平稳地由高压变到低压，在气态和液态之间并无明显的界线。在更高的温度区内，状态方程越来越接近于"理想气体"定律。

从分子的观点出发，阿伏加德罗(Avogadro)对气体进行了研究并提出了假说：在同样的温度和压力下，相同的气体体积包含了相同的分子数目。一摩尔的分于(一定量的物质用克来表示，在数值上等于该种分子的摩尔重量)包含了6.025×10^{23}个质点。这就是所谓的阿伏加德罗常数(N_0)。在标准温度和压力(即0℃和

760mm 汞柱压力)下,1 克分子的气体体积为 22,400cm³,它对应于一个质点到相邻质点的平均距离约为 33×10^{-8}cm。在标准温度和压力下,当蒸汽凝聚为液体或固体时,它的体积收缩到原来的千分之一左右;即相邻质点间间距减少到约为 3×10^{-8}cm。

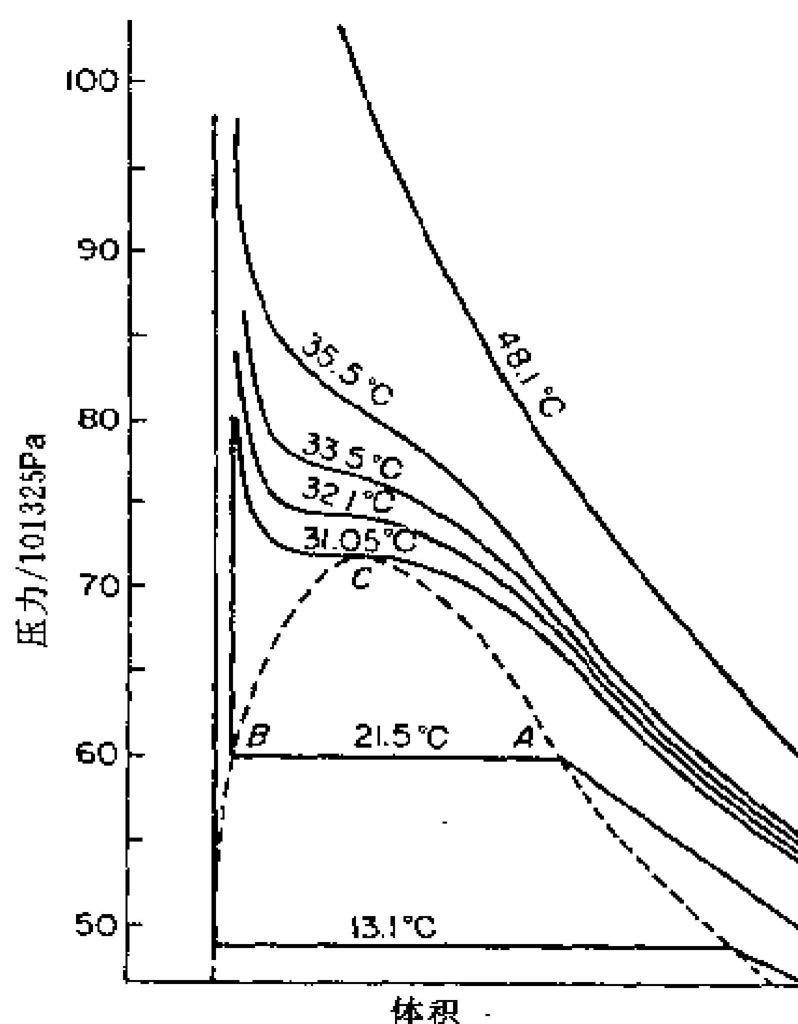


图 9.. CO_2 在临界点 C 附近体积-压力关系的等温曲线

CO_2 液一气临界点的温度为 304.2°K,压力为 72.9 个大气压,而体积为 94cm³/mol

分于运动理论将气体中的压力解释为气体分子撞击表面的反作用。根据分子撞击和回跳动量变化的研究,分子运动理论导出了联系压力(P),体积(V),和绝对温度(T)的理想气体状态方程

$$PV = RT, \qquad (9.1\text{-}1)$$

这里,

$$R = Nk。 \qquad (9.1\text{-}2)$$

对于所有物质，1 摩尔气体的 k 和 R 是普适常数。常数 k 为玻尔兹曼常数，等于 1.38×10^{-16}erg/deg，R 为气体常数，等于 8.313×10^{7}erg/deg · mol＝1.986cal/deg · mol。

对于凝聚状态，范德瓦耳兹(Van der Waals)提出了如下著名的方程

$$\left(p+\frac{\alpha}{V^2}\right)(V-\beta)=RT, \tag{9.1-3}$$

其中，$\frac{\alpha}{V^2}$代表气体质点间的引力(只有在气体密度很小时才不精确)，而 β 代表分子体积。图 9.2 表示了范德瓦耳兹 $p-V$ 曲线族。它们很象图 9.1 的各条曲线，但是图 9.1 的水平线 AB 已变成了图 9.2 的连续曲线 $AEDFB$。横坐标下的曲线部分压力为负值，被认为代表了液体的拉伸强度，这是由参数$\frac{\alpha}{V^2}$和 β 所表示的原子间近程内聚力所引起的。最小点(例如，在温度 T' 下 JHK 段的点 H 表示了液体的理想拉伸强度。水的理想拉伸强度在 0℃ 时为－1168 个大气压，在 50℃ 时为－875 个大气压。许多作者用不同的方法测量了液体的拉伸强度(参见 D. E. Grey, ed., American Institute of Physics Handbook, New York: McGraw-Hill Book Co. (1957), pp. 2-170)。实验值远低于理论值，而原因则通常认为是有核剂蒸汽、小气泡以及液体从实验用容器壁被夺走等因素作用的缘故。

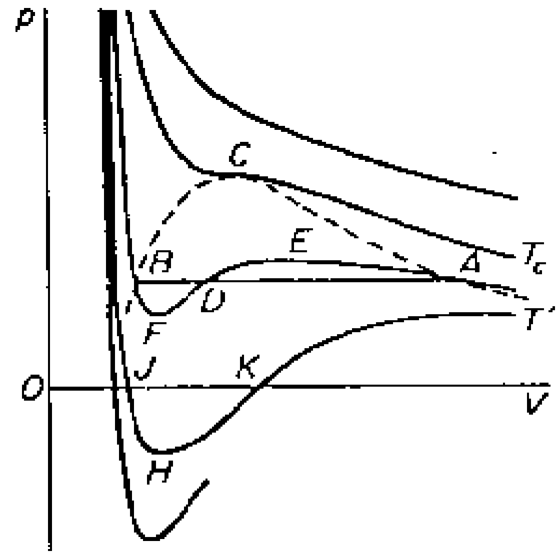


图 9.2　范德瓦耳兹等温线族

p 为压力，V 是体积，T 是温度。

液体拉伸强度的问题对气穴、船舶螺旋浆的气穴损伤、树中的水传输、树的霜冻损伤及其它问题都是非常重要的。

9.2 粘 性

牛顿用等速度梯度的剪切流给出了流体粘性这一概念，如图9.3所示。这里，坐标 x,y,z 表示一个直角笛卡尔参考构架，u 为流体的均一速度(分子速度的当地平均值)，指向 x 轴方向而仅是 y 的函数。作用在垂直于 y 轴表面上的应力写为 τ。牛顿提出了如下关于剪应力 τ 的关系式①

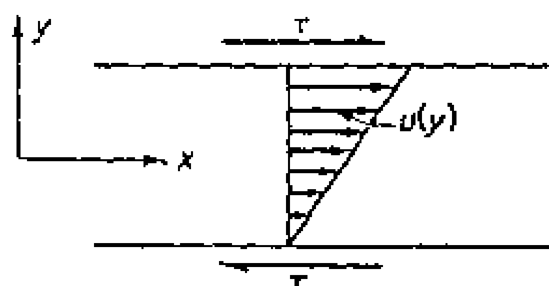


图 9.3 粘性的非牛顿概念

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{9.2-1}$$

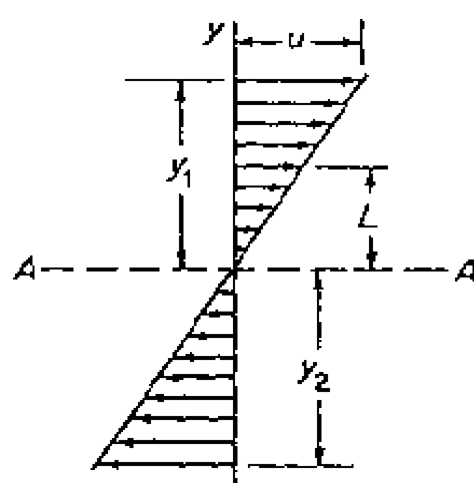


图 9.4 气体粘性系数的运动学说明

系数 μ 是一个称为粘性系数的常数，其量纲为$[ML^{-1}T^{-1}]$。在厘米—克—秒单位制中，力的单位是达因，μ 的单位叫做泊(P)，这是为了记念泊肃叶(Poiseuille)。在国际单位制中粘性单位是牛顿·秒/米²(N·s/m²)。1 泊是 0.1N·s/m²。

空气和水的粘性系数都很小，在大气压和 20℃ 之下，空气和水的粘性系数大约分别为 1.8×10^{-4}P 和 0.01P。在同样温度下甘油的粘性大约为 8.7P。在液体中，μ 值随温度的增加而相当迅速地减少。在气体中，μ 值随温度升高而增加。

麦克斯韦尔根据气体动力学理论对粘性系数作了生动的解

①参见 Chapman, S. and Cowling, T. G., The Mathmatical Theory of NonUniform Gases. Cambridge, University Press, 3rd ed., 1970.

释。研究如图 9.3 所示的等速度梯度的流动，并想象一个如图 9.4 所示的垂直 y 轴的表面 AA。它下方的气体对上方的气体所作用的剪应力起着阻滞作用。剪应力等于分子通过平面 AA 的随机运动所致的有序动量的损失率。开始位于 y_1 处并且经过界面 AA 向下运动的一个分子具有正的动量 $m(\mathrm{d}u/\mathrm{d}y)y_1$。其中 m 是分子的质量，u 是 x 方向上的有序速度，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ 是垂直速度梯度，即剪应变率。与此类似，通过 AA 向上运动而开始位于 y_2 处的一个分子具有负动量 $m(\mathrm{d}u/\mathrm{d}y)y_2$。这两种移动代表着 AA 上流体有序动量的损失。在一秒钟内通过单位面积 AA 的这一损失的总和就等于剪应力 τ。

设每个单位体积内有 N 个分子。假定在三个坐标方向的每一个方向上各有三分之一的分子移动着。如分子的平均速度为 c，并且如果它们的三分之一垂直于 AA 运动，则每秒钟有 $\frac{1}{3}N_c$ 个分子通过 AA。这些分子中的每一个分子携带着与其开始所在位置 y 处相应的动量。设高度 y 的平均值为 L，则剪应力为

$$\tau = \left(\frac{1}{3}N_c\right)m\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}L。$$

乘积 N_m 是密度 P。因此，

$$\tau = \frac{1}{3}\rho cL\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{9.2-2}$$

比较方程(9.2-1)和(9.2-2)，可得

$$\mu = \frac{1}{3}\rho cL \tag{9.2-3}$$

有效高度 L 与平均自由程 l(一个分子在与另一分子碰撞前移动的平均距离)有关，并且根据戴维·恩斯科格(David Enskog)和圣德里·查普曼(Sydney Chapman)⁺更为精确的计算表明

$$\mu = 0.499\rho cL \tag{9.2-4}$$

当气体密度减小时，平均自由程增加而乘积 ρL 几乎保持不变。因而 μ 与 c 成比例，而 c 又与绝对温度的平方根成比例。于是气体的粘性系数随温度面不随压力变化。在标准状态下(海平面，59°F)，

空气分子的平均自由程近似为 8.8×10^{-6}cm。

导致方程(9.2-2)的论证也能用于其它的传递现象。当分子穿过平面 AA 时，它们不仅带有自身有序运动的动量，面且还带有自身的质量和能量。在具有密度梯度的气体中，质量的传递相当于扩散现象。在具有温度梯度的气体中，能量的传递相当于热传导现象。于是，在最简单的理论中，有序动量分量、热能和质量的传递机理是相同的；因此得出结论：热传导系数 k 等于粘性 μ 乘以定容比热 C_v，而自身扩散系数 D 等于粘性 μ 除以密度 ρ。实验和更为精确的计算给出

$$k = 1.91\mu C_v, \quad D = 1.2\ \frac{\mu}{\rho}. \tag{9.2-5}$$

从原子的观点来解释，液体和固体的粘性与气体的不同。结晶形式的固体形成长链有序结构。原子以长链的相互作用有秩序地排列着。另一方面，气体的原子或分子仅仅在它们“产生接触”时才相互作用，并且相互作用取决于两原子或分子之间的短链吸引力。液体状态介于气体和晶体之间。一般说来，除象 X 射线衍射、各向异性等性质外，对刚好处于熔点以上的液体来说，其结构和各种性质都与其晶体的结构和性质十分相似。金属在熔解时仅膨胀 3% 到 5%（铋和冰相似，在熔解时收缩）。这就使得原子的充填不会差别过大。仿佛有 3% 到 5% 的晶格位置形成空穴，其自由体积被邻近质点所占据。质点间的这种分布方式，破坏了结构的长链次序。科特瑞尔(Cottrell)提出了简单液体的粘性起因图，如图 9.5 所示。此处，具有一定自由体积的两个原子被包围在其它原子构成的“笼子”里。该图说明了当构成笼子的

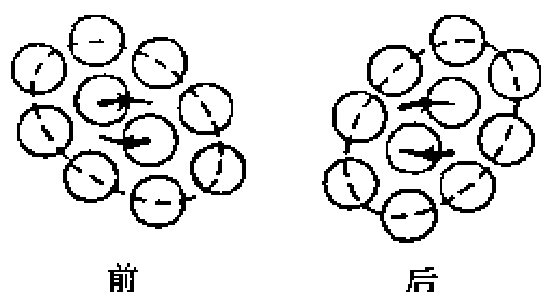


图 9.5 由 Cottrell 提出的液体粘性机理的模式图

剪切是由液体的内部运动而产生的。依照 A. H. Cottrell, The Mechanical Properties of Matter, New York: John Wiley, 1964

其它原子的相对位置保持基本不变时，这两个原子的相对运动如何使笼子具有了剪切变形。这两个原子的运动使这个原子构成的“笼子”产生了畸变。周围的液体对这样一种畸变提供了弹性(剪切)抗力。但如果附近也发生了类似的运动，这种抗力就解除了。

另一方面，晶体中的原子以空间晶格排列着。晶体同其相应的液体相比较之所以具有大得多的弹性模量和粘性，是因为晶体中原子的位置是由晶格精确地确定这一事实。

混合物、胶质溶液、悬浮液、多晶体固体、非结晶形晶体或玻璃等可能有很多其它显示粘性的松驰机理。在很多情况下，很难说一个物体的性质是象流体还是象固体。硅油灰能够从一个杯子里缓缓地倒出或者像一个橡皮球一样迅速地弹起。习惯上，流体和固体间的区别是以 10^5 泊的低应力粘性来区分的。粘性低于该值的物质称为流体，粘性高于该值的物质称为固体。

9.3　金属的塑性

如果在室温下用试验机拉伸有延性的金属杆，就可以给出作用在试件上的载荷对伸长度

$$\epsilon = \frac{l - l_o}{l_o} \tag{9.3-1}$$

的曲线，式中 l_o 是杆的初始长度，l 是作用载荷时的长度。大量实验表明，典型的载荷—伸长度关系如图 9.6 中的曲线所示。当 ϵ 很小时，载荷—伸长度关系通常是一条直线。低碳钢呈现出一个上屈服点和一个平的屈服区域，此屈服区域是由许多沿晶体滑移面滑移的微观上不连续的小台阶所引起的[图 9.6(*a*)]。其它多数金属没有这种平的屈服区域[图 9.6(*b*)]。

在变形的任一阶段卸载时，应变都不按加载曲线返回，而是沿着弹性卸载曲线下降，如图 9.6(*a*)与(*b*)中的 *UP*。重新加载曲线和卸载曲线之间有很小的偏差，而后在大致超过以前的最大应力时产生进一步的塑性变形。试件可能在某一应变下“颈缩”，从而它

的横断面积在一个较小范围内减小。在连续伸长的情况下发生颈缩时，虽然颈缩区域内的实际平均应力（载荷除以颈缩后的实际面积）继续增加，但载荷却在达到最大值后下降。最大值 M 是极限载荷。超出极限载荷后金属就要流动。在图 9.6 的曲线中的 C 点处，试件断裂。

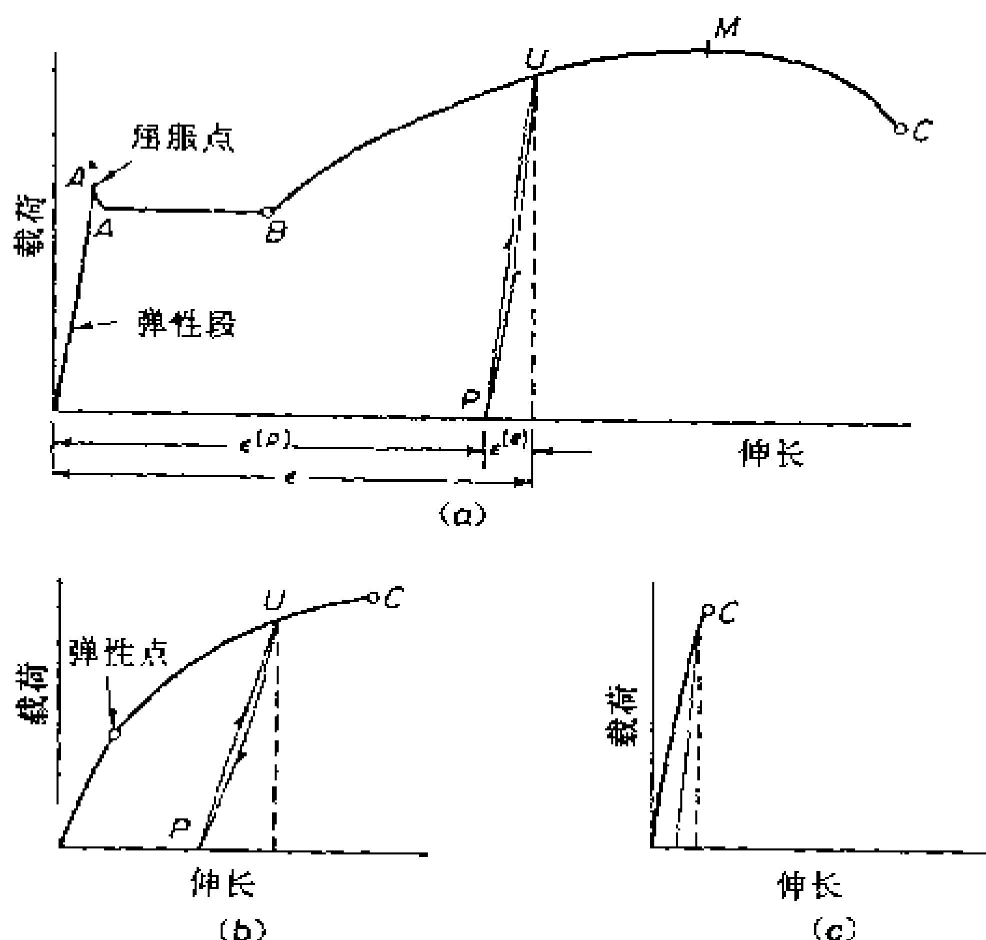


图 9.6　金属单向拉伸实验中的载荷—伸长度曲线

(a)低碳钢或结构钢；(b)铝合金或铜；(c)脆性材料，如像铸铁

像铸铁、钛的碳化物、铍、混凝土、岩石和大多数陶瓷等材料，在达到断裂点以前只许有极小塑性变形，它们统称为脆性材料。脆性材料的载荷—应变曲线如图 9.6(c)。点 C 是断裂点。

在地质学中一个十分重要的事实是：当受到大的静水压力（大的负平均应力）时，脆性材料如岩石等有变成延性材料的趋势。这一点被冯·卡门（Theodore von Karman，1881-1963）在其大理石经典实验中所证实。

受单向压缩或单向剪切试件的试验产生与图 9.6 相类似的载荷一应变图。

众所周知，尽管所有钢的弹性模量接近相同，而屈服应力和极限强度却变化很大，它们与晶体结构(包括缺隔、位错、空隙、晶界、双晶等等)有关，而化学成分、合金、热处理、冷加工等方面的微小变化都会影响晶体结构。换而言之，尽管弹性模量是"对结构不敏感的"，但强度却是"对结构敏感的"。对于没有明显屈服点的材料，在工程实际中把比例极限处的应力作为屈服强度，而比例极限则定义为达到 0.2%拉伸应变的点。在绝大多数工程结构中材料处在比例极限以内工作，因此应变实际上很小。据此，线弹性理论是有效的。

9.4 非线性弹性材料

橡皮，这种最有资格称作弹性体的材料不能用虎克定律来描述。在试验机上对橡皮条作同轴拉伸实验，就可得到如图 9.7 的应

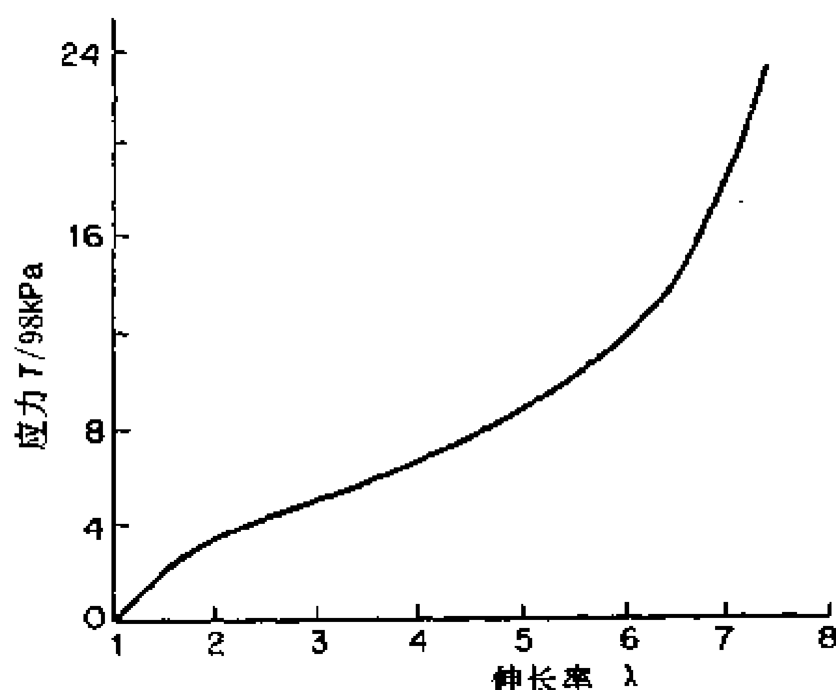


图 9.7 硫化橡胶的力一伸长曲线

力一应变曲线。它是非线性的。只有在比橡皮条正常承受应变小

得多的应变范围，线性的虎克近似才能适用。软橡皮的体积弹性模量比增量杨氏模量大 10^4 到 10^5 倍，在这个意义上讲它在实用中是不可压缩的。严格地说，橡皮的应力—应变关系是非均一的，存在着粘弹性特征。还存在着恒定应变下的应力松驰，恒定应力下的蠕变，以及在周期振荡载荷下的滞后环。因此，橡皮是一种非线性的粘弹性材料。

人和动物的活体软组织在其正常发挥功能的应变范围内也是非线性粘弹性材料。假如人们期望强调人和动物组织在所有外加载荷除去后恢复其均一构形的能力，此时通常可以说人和动物组织是弹性的。假如人们注意的是它们的粘弹性，那么也可以发现一些特殊性质。当活组织受到周期性加载和卸载作用时，它会产生一个对应变率不敏感的恒态的应力—应变环。滞后(应力—应变环中加载和卸载曲线的差异)在很大程度上不受周期性载荷的影响。应力—应变环是可重复的，即加载和卸载曲线具有一定程度的单值性。这一性质可以由准塑性这个词来描述(Fung，1971)。另一方面，“记忆函数”连接着现在的应力和过去的应力，即使是应力—应变关系是非线性的，“记忆函数”似乎仍然是线性的；因此，采用准线性粘弹性这个词来表达(Fung，1971)。

作为一个例子，我们来研究动物的一种典型结缔组织：兔肠系膜。该肠系膜是连接兔肠子的薄膜。肉眼看来它几乎是透明的，具有理想的均匀厚度(约 6×10^{-3}cm)；由于其中的小血管在二维方向上的排列对于观察和实验均十分理想，故生理学家乐于采用它作标本。为得到其总的力学性质，从肠系膜中切出一个等宽的窄条，用细丝将其两端捆上并浸入到盐液中在室温下做单向拉伸实验。这里盐液的 pH 值为 7.4，其中充以 95%氧气和 5%二氧化碳气使其冒泡，钙离子和其它离子浓度同血浆类似。

经过数次加载和卸载过程后，可得到如图 9.8 所示的对于每一应变率的应力—应变环。注意到图 9.7 和图 9.8 所示的曲线形状的差异，表明橡皮的本构方程与兔肠系膜的本构方程有很大的差异。

由于组织的应力—应变环是可重复的，我们可对该组织分别进行加载和卸载处理，将其考虑成加载时为一种弹性材料、卸载时为另一种弹性材料，即考虑为两种拟弹性材料。

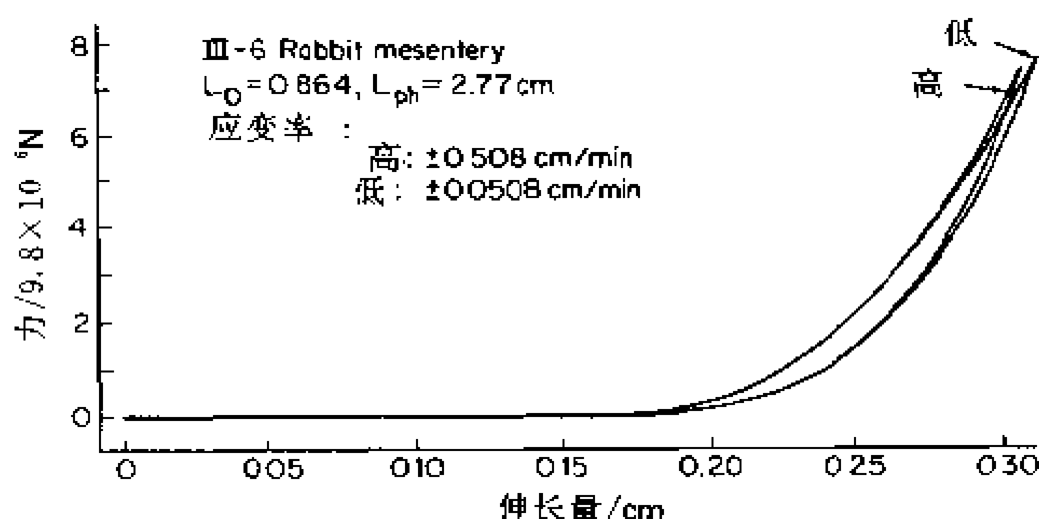


图 9.8 在两应变率下得到的兔肠系膜滞后环曲线

高应变率是低应变率的 10 倍。两滞后环曲线仅有微小的变化。引自 Y. C. Fung, "Elasticity of soft Tissues in Simple Elongation." American J. of Physiology 213(6): 1532-1544, 1957

在图 9.8 所示的两条典型的滞后环曲线中，标有"高"的曲线的应变率较标有"低"的快 10 倍。可见滞后环并不十分依赖于应变率。图中横座标是试样从一随机长度开始的伸长度。这样做的原因在于假如将伸长度的起始点当做零应力状态，那么起始点将大大向左移动而尺度将会太小。对于该试样，其零应力状态的长度为 0.865cm，生理状态长度为 2.77cm，初始横切面积为 1.92×10^{-2} cm^2。

在处理实验数据以得到应力—应变关系时，我们将采用拉格朗日(Lagrangian)应力 T(由力除以零应力状态下试样的初始横切面积而得到)和伸长比 λ(变形后的长度除以零应力状态下的长度)。当画出应力—伸长曲线的斜率 $dT/d\lambda$ 对 T 的曲线时，其应力—应变关系最显著的特征就被揭示出来了。图 9.9 给出了这样一个如图 9.8 所示的加载曲线(在 0.508cm/min 的"高"应变率下所得到的滞后环的上部曲线)的斜率图。作为第一次近似，我们可以

将实验数据拟合为一条直线，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\lambda}=\alpha(T^{*}+\beta)\quad（对于\ \lambda<\lambda_{y}），\tag{9.4-1}$$

其中 α 和 β 是常数，而 λ_y 是此方程可以应用的上限（在兔肠系膜的情形下大约为 3.2）。

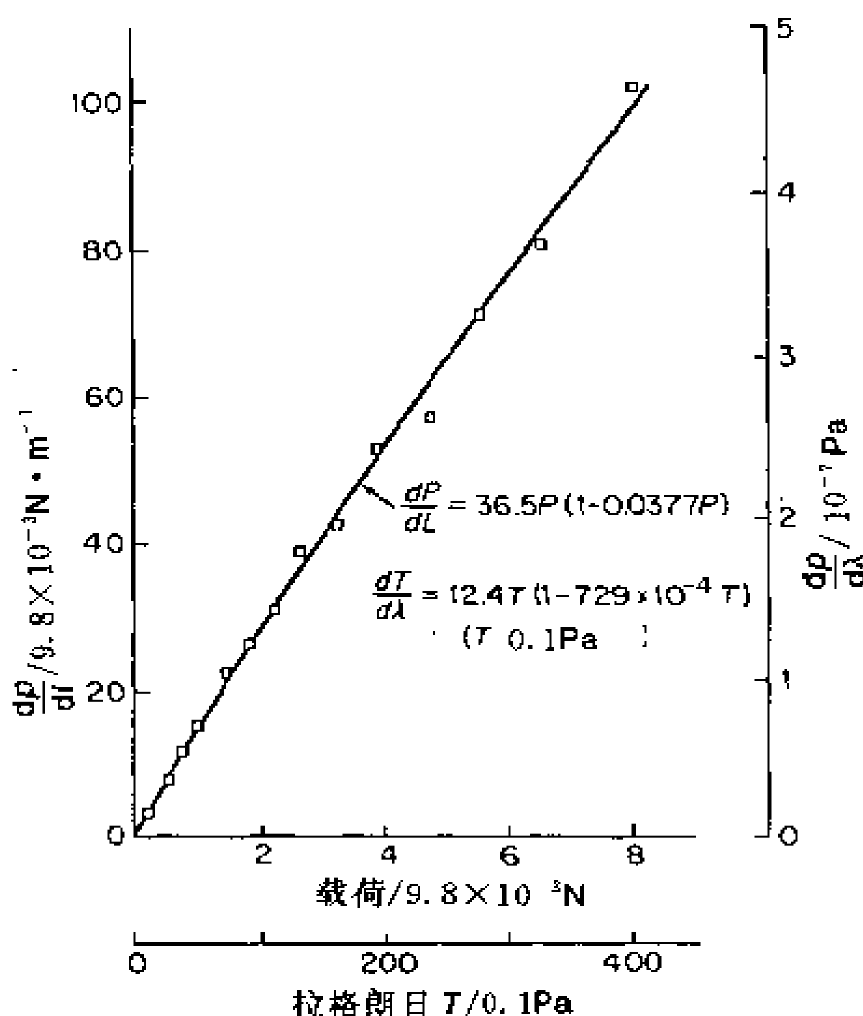


图 9.9　兔肠系膜的正切弹性模量与基于试样零应力状态下的横切面积上的拉伸应力 T 的函数关系图

注意到当假如线性虎克定律成立时该弹性模量不是一个常数。在该图中，$L_0=0.865\text{cm}$，$A_0=1.93\times10^{-2}\text{cm}^2$，$\lambda_{ph}=3.21$

对方程(9.4-1)直接进行积分，并结合到当 $\lambda=\lambda_y$ 时，应力等于 T^* 的条件，可得到

$$T+\beta=(T^{*}+\beta)\mathrm{e}^{\alpha(\lambda-1)}\tag{9.4-2}$$

我们还发现其它几种类型的软组织，如皮肤、肌肉、输尿管及

肺组织，也遵循类似的关系。因此，看来指数型本构方程是普遍适用于生物组织的。在更广泛的应变率范围内对这些组织的更一步实验给出这样一个经验：应变率在 10^4 到 10^6 个量级内变化时，在生理范围内应力相对于加载曲线的应变的变化不会超过一个 2 或 3 的因子。因此，粗略地说，生物组织对应变率是不敏感的。然而，应变率影响某种活体组织应力—应变曲线的精细方式是难以说清楚的，因为在所有的应变率下(即在大或小的应变率下不存在渐近性)它将随试样的变化而变化(即对当地的和偶然的变化敏感)。但是，整体不敏感性是一种合理的描述。

9.5 橡胶和生物组织的非线性应力—应变关系

在前一节，我们考查了若干软组织的单向应力—应变关系。对于三维结构的器官，我们自然需要三维的应力—应变定律。对于生物组织，不能确定普通的本构方程。但是，如果存在一个拟弹性应变能函数，那么应力—应变关系就可以通过微分求导的方式得出。拟弹性应变能函数写为 $\rho_0 W$，它是格林(Green)应变分量 E_{ij}的函数，并且相对 E_{ij}和 E_{ji}是对称的。对 E_{ij}取 $\rho_0 W$ 的偏导数，即可得到相应的克琪哈夫(Kirchhoff)应力分量 S_{ij}。W 定义在材料的单位质量之上，ρ_0 是材料在初始状态下的密度；因此，$\rho_0 W$ 是在零应力状态下材料单位体积的应变能。于是，

$$S_{ij} = \frac{\partial \rho_0 W}{\partial E_{ij}} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{9.5-1}$$

[参见 Fung(1965，第 16.7 节)的详细理论分析]。假如材料是不可压缩的，那么它将承担一个不依赖于物体变形的压力的作用。在那种情形下，压力项将增加在方程(9.5-1)的右边。压力值将随空间点而变化，并且只有当运动方程、连续方程和边界条件均满足时才能确定其值。因此，不可压缩流体的压力是由边界条件和运动方程来确定的。

某种材料可由其特定的 $\rho_0 W$ 来确定。$\rho_0 W$ 的确定可由理论分

析相助。例如，格林和安德金斯(Green and Adkins，1960)研究了所有形式晶体的对称性，并确定了假如它们的 $\rho_0 W$ 是应变分量的多项式函数，那么每一种晶体应该具备哪些项。所得到的一个结论是：假如材料是各向同性的，那么 $\rho_0 W$ 一定是应变不变量 I_1, I_2, I_3(参见第 5.7 节)的函数：即，

$$\rho_0 W(I_1, I_2, I_3) \tag{9.5-2}$$

假如材料是不可压缩的，则 $I_3=1$。软橡胶是不可压缩的，并且其线性形式

$$\rho_0 W = C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3), \tag{9.5-3}$$

其中 C_1 和 C_2 是常数，被证明在研究橡胶大变形时是有价值的。

绝大多数生物组织(例如，皮肤、肌肉、血管壁)是非各向同性的。某些(例如肺组织)是可压缩的。如象方程(9.5-3)的应变能线性形式不能适用于生物组织的实验数据。

根据已知的实验数据，人们已提出几个关于血管壁的应变能函数。如果把血管壁处理成一种无扭转的弹性壳体，那么仅仅只有周向和轴向的应力和应变是有意义的。因此，血管壁可以处理成二维材料，而应变能仅仅是周向应变 $E_{\theta\theta}$和轴向应变 E_{zz}的函数。帕特和瓦西列夫(Patel and Vaishnav，1972)采用了 $E_{\theta\theta}$、E_{zz}的多项式来表示 $\rho_0 W$。哈雅西(Hagashi，*et al*，1972)等采用了对数函数。冯(Fung，1973)采用了指数函数。冯等人(Fung，et al，1979)对多项式应变能函数和指数应变能函数进行了详细比较。在生理范围内，已经证实如下形式的应变能函数使用得很好：

$$\rho_0 W^{(2)} = \frac{c}{2}\exp Q \tag{9.5-4}$$

其中

$$Q = a_1 E_{\theta\theta}^2 + a_2 E_{zz}^2 + a_4 E_{\theta\theta} E_{zz} \tag{9.5-5}$$

这里 c、a_1、a_2 和 a_4 为常数。在方程(9.5-4)中物质常数的数目为四个。在三阶多项式中物质常数的最小数目为七个。

对皮肤、肌肉、韧带等的研究表明上述指数形式使用得相当好。在零应力状态附近，人们发现实验数据可使之与一线性应力

一应变定律或二阶多项式应变能函数相符合。因此，在从零应力状态到生理值的应变范围内，如下形式的应变能函数具有较高的精确度：

$$\rho_0 W^{(2)} = P + \frac{c}{2}\exp Q \qquad (9.5\text{-}6)$$

其中

$$P = b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{\theta\theta} E_{zz} \qquad (9.5\text{-}7)$$

这里 Q 与方程(9.5-5)相同，b_1、b_2 和 b_3 是补充常数。

9.6 线性粘弹性体

滞后、松驰和蠕变是广泛存在于很多材料中的普遍特征。我们把这些特征统称为粘弹性特征。

力学模型经常用来讨论物质的粘弹性特性。图 9.10 表示了物质性能的三种力学模型，即麦克斯韦尔(Maxwell)模型、伏克脱(Voigt)模型和"标准线性"模型，所有这些模型都是由弹性系数为 μ 的线性弹簧和粘性系数为 η 的阻尼器组成。假定线性弹簧能立即产生与载荷成正比的变形；阻尼器在任一瞬间能产生与载荷成正比的速度。载荷 F 和加载点处的位移 u 之间的关系为，

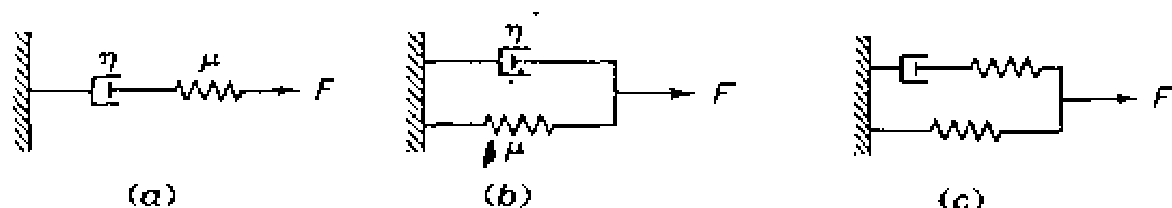


图 9.10 线性粘弹性模型

(a)麦克斯韦尔固体；(b)伏克脱固体；(c)标准线性固体

麦克斯韦尔模型：

$$\dot{u} = \frac{\dot{F}}{\mu} + \frac{F}{\eta}, \quad u(0) = \frac{F(0)}{\mu}, \qquad (9.6\text{-}1)$$

伏克脱模型：

$$F = \mu u + \eta \dot{u}, \quad \dot{u}(0) = 0。 \qquad (9.6\text{-}2)$$

标准线性模型：

$$F + \tau_\epsilon \dot{F} = E_R(u + \tau_\sigma \dot{u}), \tau_\epsilon F(0) = E_R \tau_\sigma u(0), \quad (9.6\text{-}3)$$

其中，τ_ϵ、τ_σ 是常数，而 F 或 u 上的点表示对时间的导数。

如果当 $F(t)$ 是单位阶跃函数 $1(t)$ 时，我们以方程(9.6-1)到(9.6-3)解出 $u(t)$，结果称为蠕变函数，它代表在 $t=0$ 时突然作用一个数值为 1 的常值力所引起的伸长。这些方程的蠕变函数分别是，

麦克斯韦尔模型

$$c(t) = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta}t\right)1(t) \quad (9.6\text{-}4)$$

伏克脱模型：

$$c(t) = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-(\mu/\eta)t})1(t) \quad (9.6\text{-}5)$$

标准线性模型：

$$c(t) = \frac{1}{E_R}\left[1 - \left(1 - \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}\right)e^{-t/\tau_\sigma}\right]1(t) \quad (9.6\text{-}6)$$

其中单位阶跃函数 $1(t)$ 定义为

$$1(t) = \begin{cases} 1 & 当\ t > 0\ 时, \\ \frac{1}{2} & 当\ t = 0\ 时, \\ 0 & 当\ t < 0\ 时。\end{cases} \quad (9.6\text{-}7)$$

服从类似于麦克斯韦尔模型所给出的载荷-位移关系的物体称为麦克斯韦尔固体，同样地服从伏克脱模型和标准线性模型的物体分别称为伏克脱固体和标准线性固体。由于阻尼器好像是一个在粘性流体中运动的活塞，所以上述模型称为粘弹性模型。

变换 F 和 u 的作用，我们就得到松驰函数，它是与伸长 $u(t)=1(t)$ 相对应的响应 $F(t)=k(t)$。松驰函数 $k(t)$ 是为了引起一个在 $t=0$ 时从零变到 1 并在以后保持为 1 的伸长所必须施加的力。方程(9.6-1)到(9.6-3)的松驰函数分别是，

麦克斯韦尔固体：

$$k(t) = \mu e^{-(\mu/\eta)t}1(t) \quad (9.6\text{-}8)$$

伏克脱固体：

$$k(t) = \eta\delta(t) + \mu 1(t) \qquad (9.6\text{-}9)$$

标准线性固体：

$$k(t) = E_R\left[1 - \left(1 - \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\right)e^{-t/\tau_\varepsilon}\right]1(t) \qquad (9.6\text{-}10)$$

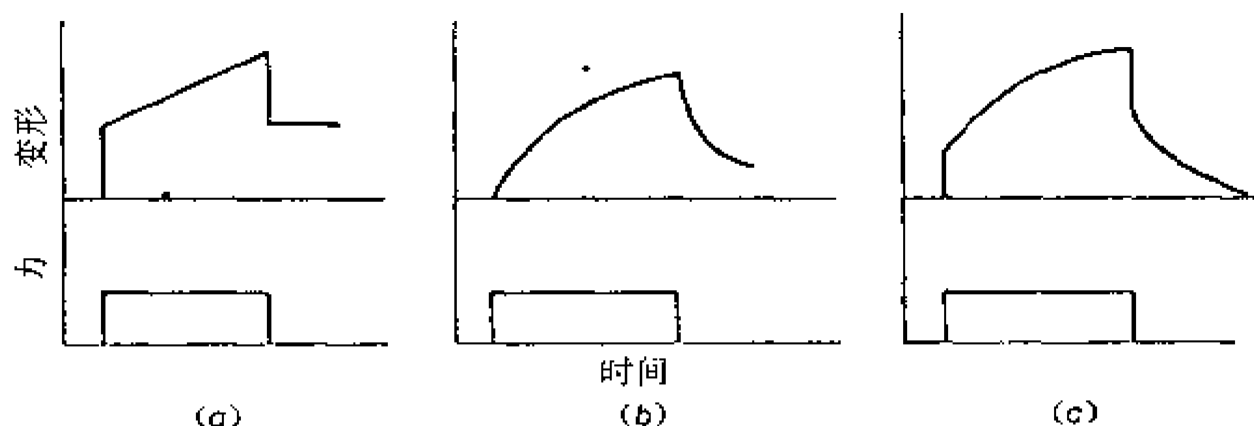


图 9.11

(a)麦克斯韦尔固体蠕变函数；(b)伏克脱固体蠕变函数；(c)标准线性固体蠕变函数，在卸载时叠加上一个负相位

在此我们采用符号 $\delta(t)$ 表示单位脉冲函数，或迪拉克(Dirac-delta)函数，它定义为在原点具有奇异性的函数，即，

$$\delta(t) = 0 \qquad (\text{当 } t < 0 \text{ 和 } t > 0 \text{ 时})$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\delta(t) = f(0) \qquad (\varepsilon > 0) \qquad (9.6\text{-}11)$$

式中 $f(t)$ 是一个在 $t=0$ 点连续的任意函数。函数 $c(t)$ 和 $k(t)$ 分别表示在图 9.11 和图 9.12 中。

对于麦克斯韦尔固体，载荷的突然作用引起弹簧的直接伸长，随后是阻尼器的蠕变。另一方面，突然的变形引起弹簧的直接的反力，随后，按照指数规律(9.6-8)使应力松驰。带时间量纲的因子 η/μ 称为松驰时间；它表征了力的衰减率。

对于伏克脱固体，力的突然作用不能引起直接的伸长，因为与弹簧并联的阻尼器不会立即运动。而从方程(9.6-5)和图 9.11(b)中可以见到，变形是逐渐增加的，与此同时弹簧则分担了越来越大

的载荷。阻尼器位移按指数关系松驰。此处，比值 η/μ 仍为松驰时间：它表示了伸长的松弛速率。

类似的解释可用于标准线性固体。常数 τ_ϵ 是在伸长为常值的情况下载荷松驰的时间[见方程(9.6-10)]，而常数 τ_σ 是在载荷为常值的情况下的松驰时间[见方程(9.6-6)]。当 $t\to\infty$ 时，阻尼器完全松驰，而载荷--伸长关系就成为由方程(9.6-6)和(9.6-10)中常数 E_R 所表征的弹簧的载荷—伸长关系。因此 E_R 称为松驰弹性模量。

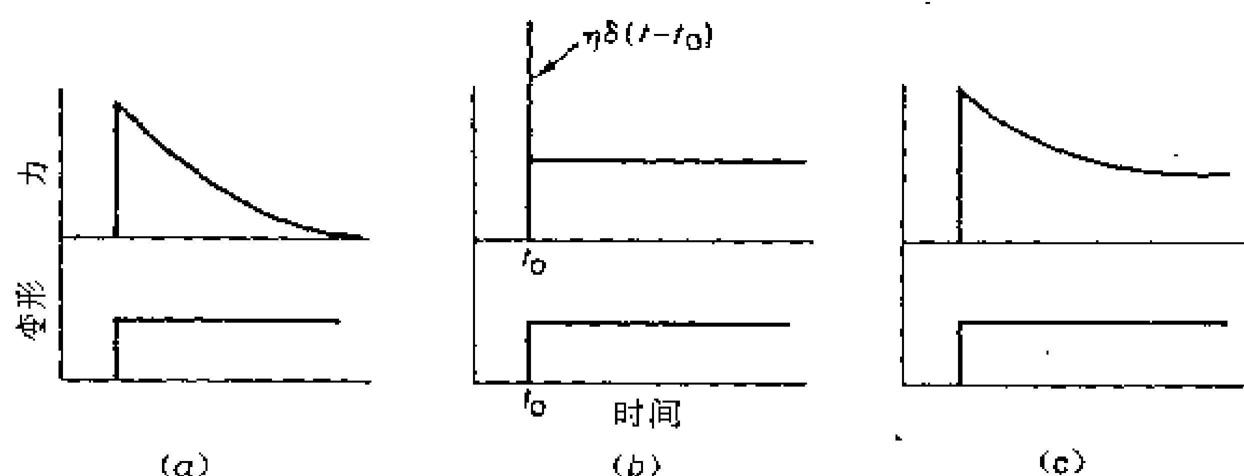


图 9.12

(a)麦克斯韦尔固体松驰函数；(b)伏克脱固体松驰函数；(c)标准线性固体松驰函数

麦克斯韦尔根据所有流体在一定程度上都可以是弹性的这一概念，引进了由方程(9.6-1)所表征的模型。克尔芬(Kelvin)曾指出：如果要解释各种物质受循环载荷时的能量耗散率，麦克斯韦尔和伏克脱模型就不适用了。克尔芬模型通常称为标准线性模型。

把越来越多的元件加到克尔芬模型上可以构成更一般的模型。这就等价于我们可以把越来越多的指数项加到蠕变函数或松驰函数上去。

玻尔兹曼(Boltymann，1844-1906)根据因果之间为线性关系的假设提出了最一般的公式。在一维情况下，我们可以研究一根简单的杆，其受力为 $F(t)$，伸长为 $u(t)$。伸长是由直至时刻 t 的全部加载过程作用所引起的。如果函数 $F(t)$ 连续可微，那么在 τ 时刻

的一个短暂间隔 $d\tau$ 内，载荷增量为 $(dF/d\tau)d\tau$。这个增量仍作用在杆上，并使 t 时刻的伸长增加了一个微量 $du(t)$，它和比例常数 c 有关，c 依赖于时间间隔 $t-\tau$。因此，我们可写出

$$du(t) = c(t-\tau)\frac{dF(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{9.6-12}$$

取运动和加载的始点为时间的起点。然后把满足玻尔兹曼假设的所有过程累加起来，我们得到

$$u(t) = \int_0^t c(t-\tau)\frac{dF(\tau)}{d\tau}d\tau。 \tag{9.6-13}$$

交换 F 和 u，可以得到一个类似的结果

$$F(t) = \int_0^t k(t-\tau)\frac{du(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{9.6-14}$$

这些定律是线性的，因为载荷加倍，伸长加倍，反之亦然。函数 $c(t-\tau)$ 和 $k(t-\tau)$ 分别为蠕变函数和松弛函数。

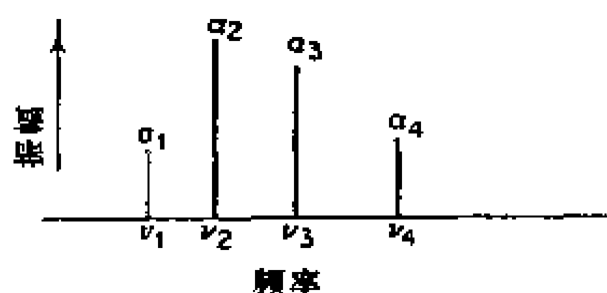


图 9.13 松弛函数的离散谱

麦克斯韦尔模型、伏克脱模型和克尔芬模型是玻尔兹曼公式的特例。我们可把松弛函数写成下面的更普遍形式，

$$k(t) = \sum_{n=0}^{N}\alpha_n e^{-t\nu_n} \tag{9.6-15}$$

它是方程(9.6-10)的推广。如果我们画出与频率轴上每一特征频率 ν_n 有关的振幅 α_n，就得到一系列像光谱那样的线，如图 9.13 所示。因此，$\alpha_n(\nu_n)$ 称为松弛函数谱。如方程(9.6-8)——(9.6-10)所示的例子是离散谱。在下一节将给出连续谱的一般形式。

9.7 生物组织的准线性粘弹性

我们来阐明第 9.4 节中提及的生物软组织的粘弹性特征。把

肺组织作为一个例子。图 9.14 给出在不同应变率下加载时肺组织的应力—应变关系。每一循环是在一个恒定应变率下得到的。每一循环加载的周期标注在图中。当应变率有 360 倍以上的变化时，其应力—应变关系仅有微小的变化。滞后率 H 定义为滞后环面积除以加载曲线下的面积，也标注在图中。可见 H 是可变的，但它随应变率的变化不大。对于其他的生物组织也遇到类似的情况。对骨骼肌和心肌、输尿管、结肠带、动脉、静脉、心包、肠系膜、胆管、皮肤、肌腱、弹性纤维、软骨和其他生物组织的记录显示出类似的特征。具有典型意义的是，在应变率变化为 1000 倍时，在加载(或卸载)过程中给定应变下的应力变化不会超过一个 2 的因子。

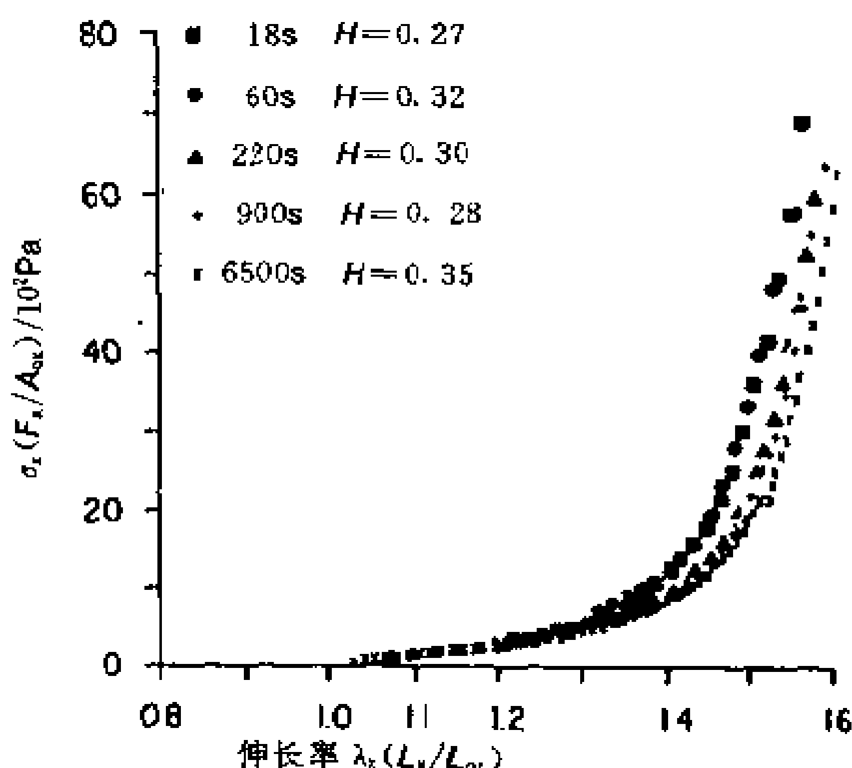


图 9.14 在周期性二维加载作用下肺组织应力-应变关系的一组记录图

图中给出加载相(为清楚起见图中未给出卸载相)。肺组织的粘弹性通过应变率对应力-应变关系的影响而被揭示出来。这组曲线覆盖了应变率变化在 250 倍以上的范围。可见应力-应变关系不受应变率很大的影响。每一循环耗散的能量除以该循环加载所做的功称为滞后率，用 H 表示。不同应变率(循环周期)下的 H 值标注在图中。滞后是粘弹性引起的，可见随应变率变化不大。详见 D. L. Vawter, Y. C. Fung, and J. B. West, "Elasticity of Excised Dog Lung Parachyma", Journal of Applied Physiology, 45 (2): 261-269, 1978

图 9.14 给出了两个在第 9.6 节讨论的粘弹性模型中未提供的特征：应力-应变关系的非线性和物质对应变率的不敏感性。前者可通过加入非线性弹簧加以修正。后者可通过参考图 9.15 而说

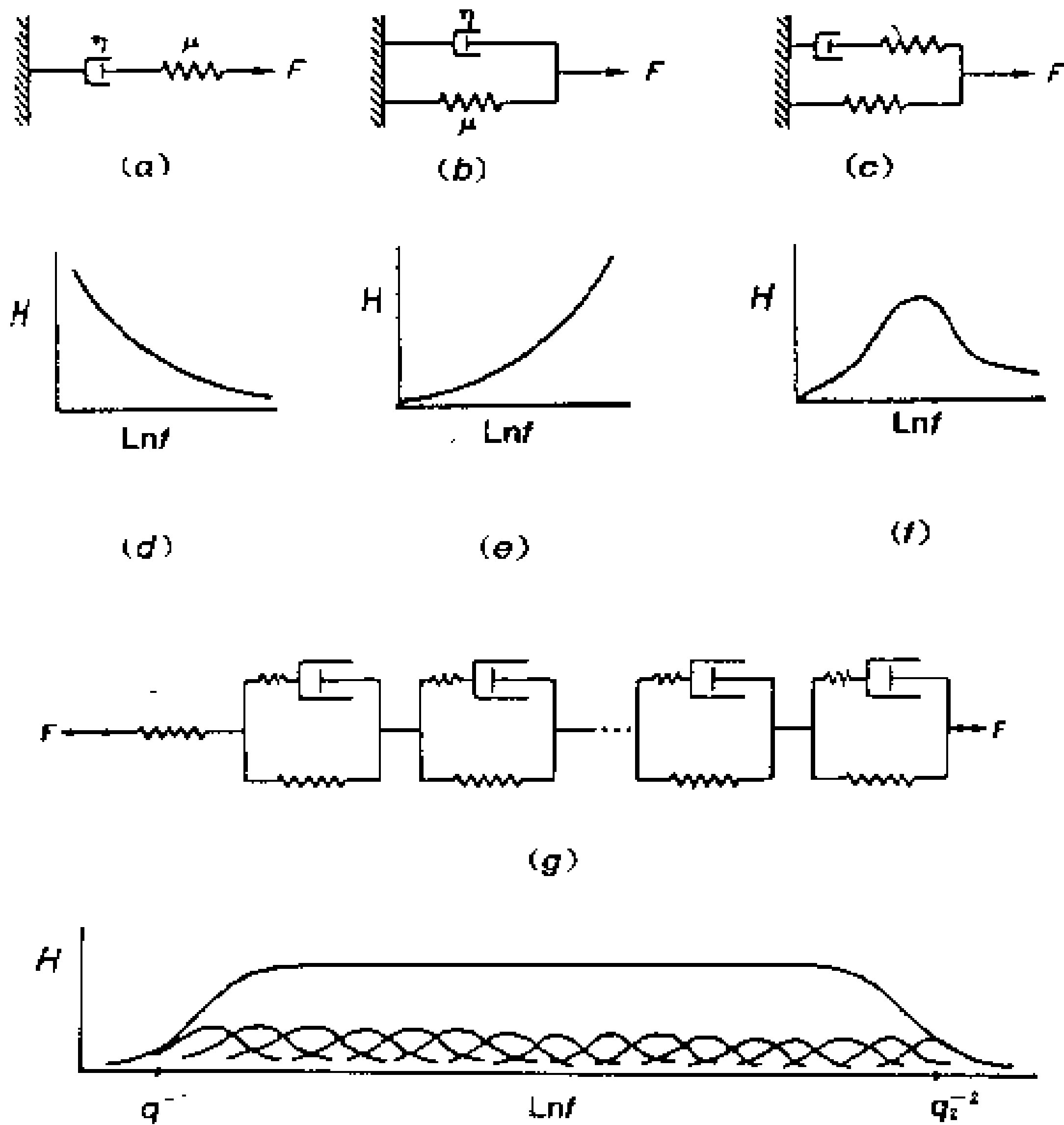


图 9.15

第一排给出了(几)个标准粘弹性模型，第三排给出了生物软组织的粘弹性数学模型。图中第二排的(*d*)区、(*e*)区和(*f*)区分别给出了麦克斯韦尔模型(*a*)、伏克脱模型(*b*)和克尔芬模型(*c*)的滞后率(*H*)与对数频率(l_nf)之间的关系。图中最底部一排给出了对应第三排的模型(*g*)的、普遍存在于绝大多数生物组织的滞后率—对数频率关系。生物软组织通常在相当广的频率范围内具有近似于恒定的滞后率。这一点通过(*g*)中克尔芬模型的组合进行了模拟；每一个克尔芬模型给出一个小的铃形曲线；其总和在一个广泛的频率范围内是平坦的，如图(*h*)示

明得更清楚，该图中给出了(*a*)麦克斯韦尔模型,(*b*)伏克脱膜型,(*c*)克尔芬模型,以及它们的滞后特征值 H[从(*d*)到(*f*)];H 是加载和卸载循环频率的函数。在麦克斯韦尔模型中滞后率 H 随着频率的增加而减小,因为当频率增加时,阻尼器的运动愈来愈慢。伏克脱模型的趋向恰好相反,因为此时阻尼器吸收了愈来愈多的载荷。克尔芬模型对于频率的对数则表现出一个铃形的曲线。每一组常数给出一个特征峰。上述模型均未给出生物组织的平坦滞后曲线。

适用于软组织的模型如图 9.15(*g*)所示。它是由一长串克尔芬体组成,其特征时间横跨一个很广泛的范围。这些克尔芬体的滞后特征曲线以脉动形式表示在图 9.15(*h*)的底部。这些脉动曲线的总和是一个在较广泛频率范围平坦的连续曲线。

为了把观察结果写成数学形式,我们引入了一个弹性应力 $\boldsymbol{T}^{(e)}$(张量),它是应变 $\boldsymbol{E}$(定义于零应力状态的张量)的函数。假如某种材料在时间 $t=0$ 以前均处于零应力状态。然后突然受到应变 $\boldsymbol{E}$ 的作用并在该值保持恒定不变,则所响应的应力将是时间以及 $\boldsymbol{E}$ 的函数。应力发展史可以写作

$$G_{ijmn}(t)T_{mn}^{(e)}(E),\quad G_{ijmn}(0)=1,\qquad(9.7\text{-}1)$$

其中,$G_{ijmn}(t)$是时间的归一化函数,称为归一化松弛函数。然后我们假定,对应变分量 δE_{ij}无限小变化的应力响应叠加在处于时间常数 τ、应变 E 状态中的试样上,对于 $t>\tau$,该应力为

$$G_{ijmn}(t-\tau)\frac{\partial T_{mn}^{(e)}[E(\tau)]}{\partial E_{ij}}\delta E_{ij}(\tau)。\qquad(9.7\text{-}2)$$

最后,我们假定叠加原理适用,结果有

$$T_{ij}(t)=\int_{-\infty}^{t}G_{ijmn}(t-\tau)\frac{\partial T_{mn}^{(e)}[E(\tau)]}{\partial E_{kl}}\frac{\partial E_{kl}(\tau)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau。\qquad(9.7\text{-}3)$$

即时刻 t 的应力是过去所有变化所贡献的总和,每一变化均由相同的归一化松弛函数所控制。尽管 $\boldsymbol{T}^{(e)}(\boldsymbol{E})$可以是应变的非线性函数,但松弛过程是线性的。因此,该理论称为准线性粘弹性理论。方程(9.7-3)的积分下限写作$-\infty$,即意味着时间的始点。

一维克尔芬模型的归一化松弛函数为

$$G(t) = \frac{1}{1+S}[1 + Se^{-t/q}] \tag{9.7-4}$$

这里 S 和 q 是常数。假如我们将无限个克尔芬模型串联，则可得到如下形式的归一化松驰函数

$$G(t) = [1 + \int_0^\infty S(q)e^{-t/q}dq][1 + \int_0^\infty S(q)dq]^{-1} \tag{9.7-5}$$

$S(q)$称为松驰谱，$1/q$ 为频率。已经证明，一个具有常数 c，q_1 和 q_2 且被定义为

$$S(q) = \begin{cases} \dfrac{c}{q} & 对于 q_1 \leqslant q \leqslant q_2, \\ 0 & 对于 q < q_1, q > q_2 \end{cases} \tag{9.7-6}$$

的特定松驰谱适用于对皮肤、动脉、输尿管和结肠带的观察数据。

9.8 非牛顿流体

牛顿粘性定律很好地描述了水的特性，但是还有许多其他流体具有不同的特性。我们看到一些油漆广告上定着："不滴下（在刷子上不流动），容易涂开（流动阻力很小），不留下刷子的痕迹（流动使得表面光滑）。"这些对家用油膝所期求的特性不是牛顿性的。多数的油漆、珐琅质和清漆是非牛顿型的。多数高分子溶液也是非牛顿型的。

把对我们生命十分重要的流体—血液作为例子来说明这个题目。血液粘性取决于应变率。图 9.16 给出了血液粘性系数随应变率的变化，它是由钱（Chien），尤塞米（Usami），格里葛生（Gregersen）等人采用 Couette 式粘度计测出的。当应变率降低到约 $100s^{-1}$以下时，粘性系数随应变率减小而增加。在应变率很低时，血液具有限"屈服"应力，即它是粘塑性的。其他的粘塑性材料将在下一节中讨论。

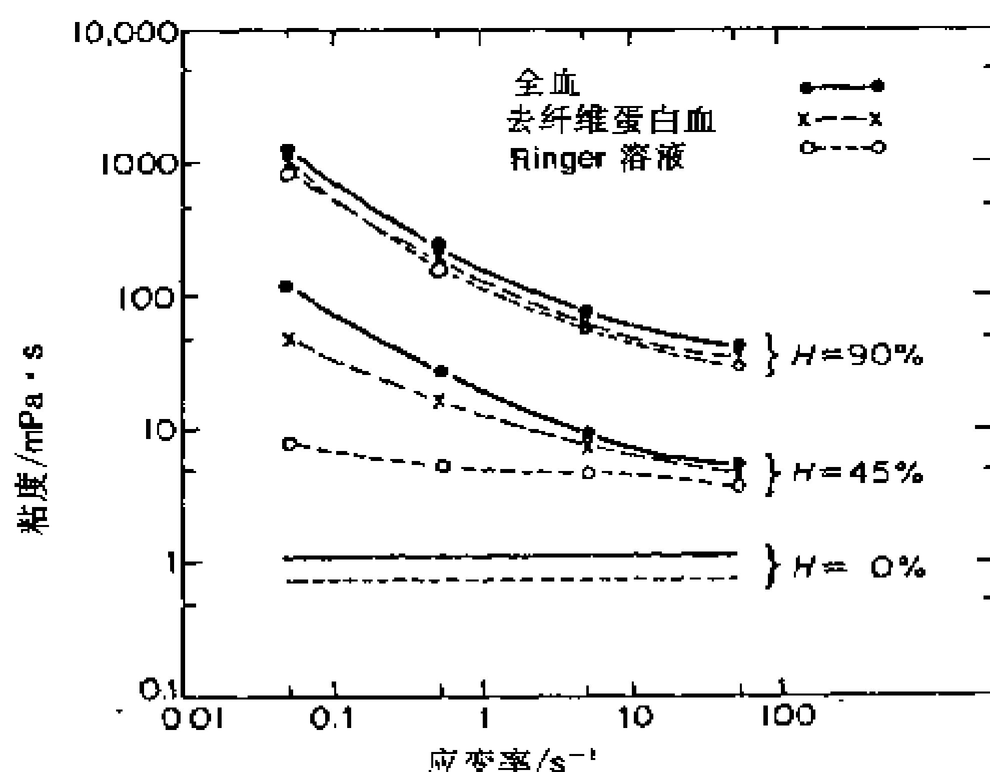


图 9.16 人血粘性系数随应变率的变化

实验结果包括全血、去纤维蛋白血,红细胞 *Ringer* 悬浮液,压积(红细胞体积浓度)为 45%和 90%。根据 S. Chien, S. Usami, H. M. Taglor, J. L. Lundberg, M. I. Gregersen, J. Appli. Physiol., 21(1966), P. 81, and M. I. Gregersen, "Factors Regulating Blood Viscosity; Relation to Problems of the Microcirculation," Les Concepts de Claude Bernard sur le Milieu in terieur (Paris; Masson, 1967)

非牛顿流体的领域远远大于牛顿流体的领域,以致于其前景还远未被探明。

9.9 粘塑性材料

服从牛顿粘性定律的物质必定会在极微弱的剪应力下(更确切地说是在非零应力偏量下)流动。像酸面团、浆糊、造型用的粘土物质则不遵循这一规则。宾汉姆(Bingham)创造了"流变学"这一词来描述流动的科学(Greek, Peos 流动),并用公式导出了人们称为粘塑性一类物质的定律,酸面就属于该类物质。粘塑性物质常称

为宾汉姆塑性物质。

粘塑性物质处于静止状态时，能承受具有非零应力偏量的压力作用。参见图 9.17。首先来研究受简单剪切的物体，在此情况下，除剪切力 $\sigma_{12}=\sigma_{21}=\tau$ 及剪应变率 $V_{12}=V_{21}=\dot{e}$ 外，应力张量和应变率张量的所有其他分量均为零。只要剪应力 τ 的绝对值小于被称为屈服应力的某个常数 K，物质就仍为刚性的，因而 $\dot{e}=0$。但一旦 $|\tau|$ 超过 K，物质就发生流动，流动的应变率 $\dot{e}$ 与 τ 具有相同的符号，并且其绝对值正比于 $|\tau|-K$。于是

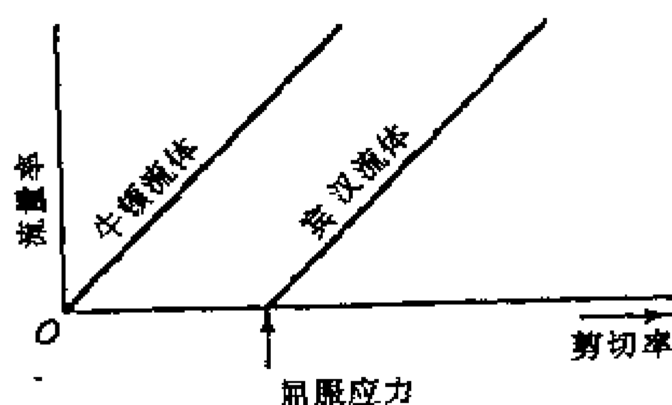


图 9.17 粘塑性物质的流动率-应力关系与牛顿流体的流动率-应力关系的比较

$$2\mu\dot{e}=\begin{cases}0 & \text{假如 } |\tau|<K \text{ 时,}\\ \left(1-\dfrac{K}{|\tau|}\right)\tau & \text{假如 } |\tau|>K \text{ 时,}\end{cases} \tag{9.9-1}$$

其中，μ 是粘性系数。引入定义为

$$F=1-\frac{K}{|\tau|} \tag{9.9-2}$$

的**屈服函数** F，上述公式可以写得略有不同。于是，单向剪切状态的粘塑性物质被宾汉姆(1922)* 用如下关系来定义

$$2\mu\dot{e}=\begin{cases}0 & \text{如 } F<0\\ F\tau & \text{如 } F\geqslant 0.\end{cases} \tag{9.9-3}$$

霍赫宁瑟(Hohenemser)和普拉格(Prager)(1932)* 把宾汉姆的定义以如下形式推广到任意的应力状态

$$2\mu V_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如 } F<0,\\ F\sigma'_{ij} & \text{如 } F\geqslant 0,\end{cases} \tag{9.9-4}$$

此处

$$F = 1 - \frac{K}{\sqrt{J_2}} \tag{9.9-5}$$

其中

μ=粘性系数，

V_{ij}=应变率张量(参见第6.1节)，

σ'_{ij}=应力偏量张量$\doteq \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}$，

K=屈服应力，

J_2 =应力偏量的二阶不变量

$$= \frac{1}{6}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 - (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2。$$

对于单向剪切，方程(9.9-4)和(9.9-5)分别简化成方程(9.9-3)和(9.9-2)。①

根据方程(9.9-4)，在粘塑性物质中应变率张量是一偏量，即物质是不可压缩的。当屈服函数为负值时，物质是刚性的。当屈服函数具有正值时就产生流动。$F=0$的应力状态形成了屈服极限。在屈服极限处粘塑性流动开始或终止；到底是开始或终止，取决于通过屈服极限的方向。

可以对宾汉姆方程(9.9-3)作进一步推广。例如，可以引入可压缩性，或提出其他的屈服准则以替代方程(9.9-5)。

9.10 溶胶—胶体转换和搅溶性

胶体溶液可以具有刚性(受到剪应力而不流动)，称为凝胶；或者它可以表现为没有刚性的流体，称为溶胶。凝胶包括分散成分和分散介质，两者连续地遍布在整个系统中。凝胶的弹性性质可以随

---

①Binghem, E. C. Fluidity and Plasticity. New York, McGraw-Hill, 1922, p. 215。

\+ Hohenemser, K., and Prager, W., "Uber die Ansatze der Mechanik. isotroper Kontinua". Zeitschrift f. angen Math u. Mech. 12:216-226, 1932。

其寿命而变化。凝胶的分散介质通常被看作形成了网络，该网络是由键或结点被此固定的；键或结点可以由主原子价键、长程引力或次原子价键所形成，它使各部分的聚合物链或亚微观结晶区各结构之间结合起来。在应力作用下，每一个结点都是一个松驰机构。所有这些松驰机构的整体统计性质就是由材料的粘弹性来描述的。

通过改变温度、搅拌或者是称为胶溶的化学过程，常常能把凝胶转化成溶胶和把溶胶转化成凝胶。如果能用机械振动的方法等温地诱导出可逆的凝胶—溶胶转换，那么根据弗罗因德利克(Freundlich)的说法，此种物质称为搅溶性物质。凝胶通过机械搅拌变成溶胶，而当搅拌停止时溶胶又变成了凝胶。

搅溶性物质的例子有油漆、印刷油量、氧化铁溶胶、琼脂、陶土悬浊液、碳墨等。搅溶性物质普通存在于生物界中。变形虫内的原生质也许就是最熟知的例子。

胶体系统是否具有搅溶性与离子强度的微小变化有关。有关许多有趣的例子，可参见 Scott-Blair, G. W., An Introduction to Biorheology, New York, Elsevier, 1974。

习 题 9

9.1 证明飞机结构材料中的音速是防止像空气湍流、阵风作用和颤振等动力学问题的安全性准则。为此研究两个在几何与结构上相同但材料不同的飞机。为使问题简化，只考虑下面四个典型参数：材料密度 σ、弹性模量 E、空气密度 ρ、飞机飞行速度 U。利用因次分析以构成相似参数。设 σ、E、ρ 和 U 是对于一架飞机，而 σ'、E'、ρ' 和 U' 则是对另一架飞机的。证明为了满足动力相似，我们必须有

$$\frac{U'}{U}=\sqrt{\frac{E'}{\sigma'}}\Big/\sqrt{\frac{E}{\sigma}}。$$

如果 U 表示安全飞行速度的极限(例如颤振临界速度，那么上述公式把 U 和音速 $\sqrt{E/\sigma}$(杆中的纵波速度)联系了起来。

9.2 固体中的音速是比较飞机结构刚性的重要相似参数。如果你是选择结

构材料的飞机设计师。利用手册可列举出下列结构材料的音速、纯铝、镁、铝合金、镁合金、碳钢、不锈钢、钛、钛的碳化物以及相当奇特的材料氧化铍或纯铍。把它们和人造萤光树脂、酚醛层板以及沿纹理方向的云杉木、红木、轻质木和竹相比较,发现这么多材料的音速之间的差别非常的小,对此你不感到奇怪吗?从这个观点看什么材料最好?

9.3 如果你研究在风中有引起摆动危险的悬索桥,证明可得出与题 9.1 相同的结论。(原来架设在华盛顿普吉湾(Puget Sound)上的塔科玛窄桥(Tacoma Narrows Bridge)在通车后四个月,于 1940 年 11 月 7 日在 42mile/h(18.7m/s)的风速下。由于颤振引起了惊人的破坏。那天早晨桥的振动频率突然由 37 周/min 变为 14 周/min,这可能是由小的加强连接杆件的破坏所引起的。运动以扭转模态的形式迅猛地增长,并在半小时后发生了破坏。如果不是由于空气动力诱发了振动(颤振)这个桥至少应该经受住 100mile/h(44.7m/s)的稳定风速。)

9.4 用 Couelte 流量计(P3.22 图,P86)所测得的血液粘性实验数据(图 9.16所示)可近似地用 Casson 方程

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + b\sqrt{\dot{\gamma}}$$

来表示,其中 τ 是剪应力,τ_y 是一个可以等同于屈服应力的常数,$\dot{\gamma}$是剪应变率(s^{-1})。试把这个结果推广到血液的本构方程中,从因次分析和张量分析的角度来看,所得出的本构方程都是正确的。

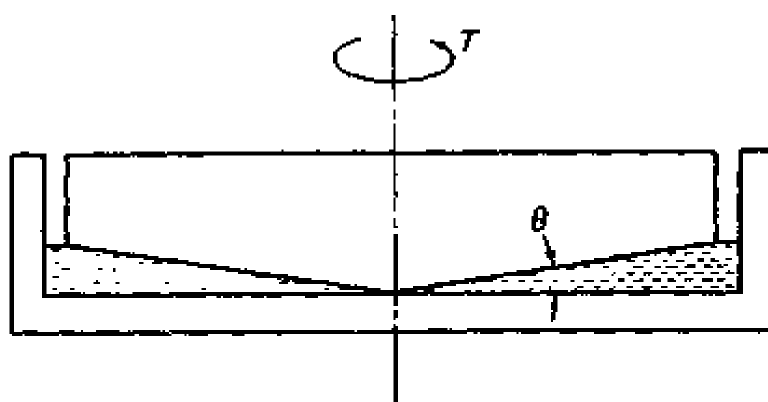


图 P9.5 锥板式粘度计

9.5 将血液置于锥板式粘度计(图 P9.5)的锥与板之间。锥体以每秒钟 n 转的角速度旋转,而板则保持静止。推导作用在锥体上的力矩 T、角速度 n、半径 R、锥角 θ 与 9.4 题中导出的本构方程的常数 τ_y 和 b 之间的关系。在图 P9.5 中,锥角 θ 是被夸大了的。实际上它必须很小。讨论当

θ 较大时将产生何种复杂性？为什么？

9.6 假定在受到静水压力时不发生体积膨胀。证明：服从虎克定律的任何各向同性弹性体的泊松比 ν 的最大值为 1/2。

9.7 钢筋混凝土是浇注在钢筋上的混凝土。一个垂直、中空的钢筋混凝土柱的内径为 3 英尺，厚度为 3 英寸，在圆周方向均匀分布着 36 根面积为 1 平方英寸的钢棒。柱受到垂直载荷，它的合力沿柱的轴线方向。钢的杨氏模量与混凝土的弹性模量之比为 15。混凝土的泊松比为 0.4，钢为 0.25。试确定在离柱的端部某一距离处的横切面上、由钢所传递的载荷的份额。

9.8 研究以麦克斯韦尔模型为特征并由方程(9.6-1)所描述的粘弹性材料。把一个正弦变化的力 $F=a\sin\omega t$ 加在该物体上。在稳定状态时的挠度 u 是多少？

答案

$$u=\frac{A}{\omega}[\sin(\omega t-\alpha)+\sin\alpha],$$

式中

$$A=\left[\left(\frac{a\omega}{\mu}\right)^2+\left(\frac{a}{\eta}\right)^2\right]^{1/2},\quad \tan\alpha=\frac{\mu}{\eta\omega}。$$

9.9 液体从贮箱中以 $10\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的流速由直径为 1cm 的长管流下。可以看到流线如图 P9.9 所示。主要特点是当液体离开管子时液柱的直径要膨胀。牛顿流体会这样吗？请提出用哪一种应力--应变关系？[参见 A.S. Lodge, Elastic Liquids, New York: Academic Press(1964), P. 242]。

9.10 当人们用一台电搅拌机搅拌油漆时，发现油漆附着到搅拌机的轴上，这个实验揭示出油漆是哪一种应力—应变关系(参见 A.S. Lodge, ibid, P. 232)。

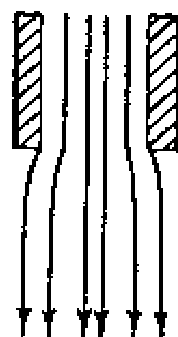


图 P9.9 流出喷口的非牛顿流体

9.11 取出一支粉笔并把它扭断，描述断口表面并推断有关粉笔强度的准则。

此外用弯曲来破坏粉笔，并讨论断裂机理。

9.12 取一段尼龙线，将其拉断，讨论尼龙线的断裂机理，并与 9.11 题中的粉笔相比较。

9.13 取一玩具橡皮球并将其吹胀。用针在吹胀的气球上扎一孔，则气球破

裂。现在不吹胀气球，用双手拉紧气球并请朋友用针刺一孔，则气球不破裂。你能否解释该现象？采用怎样的橡皮本构方程可反映这一事实？

9.14 许多工程和生物结构是由复合材料构成，该种复合材料是由较刚性的成分埋置于较柔软的基质中而组成的。考虑以下两种模型：(a)一环形圆管，其管壁内埋置有直径较小的高强度纤维。纤维和基质材料的杨氏模量分别为 E_f 和 E_0，且 $E_f \gg E_0$。这些纤维平行于管轴线，均匀分布，纤维的总横切面积是管总横切面积的一部分。当管受轴向拉伸时，其杨氏模量是多少？(b)一环形圆管，内径为 a、外径为 b，其间埋置有螺旋线卷曲的纤维。这些螺旋形纤维与管轴线成一 θ 角。一半纤维以右手螺旋方式、一半以左手方式卷曲。纤维和基质的杨氏模量仍然分别为 E_f 和 E_0。计算管在轴向拉伸时的有效弹性模量。假设纤维是按理想方式埋置的。(c)当(a)和(b)两种圆管均受到内压力 p_i 的作用时，纤维和基质是怎样承受该载荷的？(d)当垂直于管轴的横向剪切载荷作用于圆管时，如何承受剪切？分析在纤维和基质中的应力。(e)类似地，分析圆管承受弯曲力矩时的应力分布。(f)扭转承载力也是很重要的。对圆管作用一扭矩 T，那么在纤维和基质中的应力是怎样的？

9.15 为测量水和其他液体的拉伸强度，黎曼·布瑞格斯(Lyman Briggs，J. Chem. Physics 19(1951)，p. 970)采用了一种 Z-形毛细管，两端开口，在 Z-平面内绕经过 Z-形管中心并垂直于 Z-平面的轴旋转。液体的弯曲面位于 Z-形管向后弯的短臂管内。旋转速度逐渐加大直至毛细管内的液体“破碎”为止。假如人们用两端开口的直管来做该实验，那么流体会跑掉，实验不可能进行。Z-形管向后弯的短臂管使得流体具有稳定性。检验这个稳定性问题，并且提出这个实验的理论基础。

10 场方程的推导

在前述各章中，已分析了变形（应变）和流动（应变率）以及它们与物体（连续介质）内部各部分间相互作用力（应力）的关系。本章将用这些知识来导出描述连续介质在特定边界条件下的运动微分方程组。这些公式都遵守牛顿运动定律、质量守恒原理和热力学定律。本章将把这些定律处理成适合于连续介质的形式。

人们可能会奇怪：为什么还要进一步推敲这些众所周知的定律。下面的例子可以回答这个问题。如果只处理单一质点，质量守恒原理仅是叙述为“质点的质量为一常数”。然而如果有大量质点，譬如对一朵云彩中的水滴，就要另作考虑了。描述云就不能再把云看成是一些单个的质点，最好的方法是研究它的速度场、密度分布、温度分布等。本章中所注重的正是这种情况下经典守恒定律的描述。

处理方法基于：这些守恒定律必须能适用于以任意闭合曲面为边界的封闭系统的情况。在该方法中会看到一些量很自然地放入面积分内，另一些量则放入体积分内。从面积分变换成体积分或其逆变换会经常用到，这样的变换包含在高斯定理内。因而高斯定理将作为本章的数学起点。

10.1 高斯定理

本节以推导高斯定理开始。考虑一以 S 面为边界的凸区域 V，

S 面为有限个部分组成，每部分的外法线形成一连续的向量场（如图 10.1 所示）。这样的区域称为正则区域。函数 $A(x_1,x_2,x_3)$ 定义在体积 V 和 S 面上。设函数 A 在 V 内连续可微。讨论体积分

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

被积函数为函数 A 对 x_1 的偏导数。

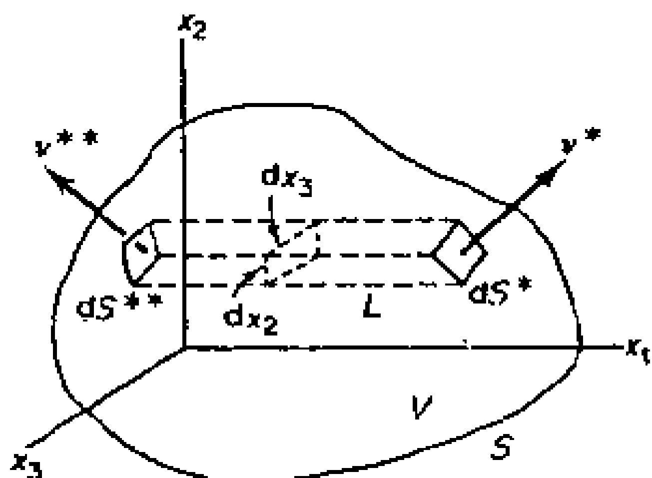


图 10.1　高斯定理推导的积分路径示意图

沿 L 段对 x_1 积分，可得

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \iint_S (A^{*} - A^{**})\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \quad (10.1\text{-}1)$$

式中，A^{*} 和 A^{**} 分别为与 x_1 轴平行的 L 段在 S 面上右端和左端的值。方程(10.1-1)右侧的面积分可以写得更简洁一些。L 段两端的面积分别为 $\mathrm{d}S^{*}$ 和 $\mathrm{d}S^{**}$，它们在 x_2x_3 平面上的投影分别是 $+\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ 和 $-\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$。设 $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$，是 S 面外法线单位向量。由图 10.1 所示，可见：$\nu_1^{*}=\cos(x_1,\nu^{*})$ 为正值，而 $\nu_1^{**}=\cos(x_1,\nu^{**})$ 为负值。很容易看出，右端 $\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\nu_1^{*}\mathrm{d}S^{*}$，左端 $-\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\nu_1^{**}\mathrm{d}S^{**}$。方程(10.1-1)的面积分可写成

$$\iint_S (A^{*}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 - A^{**}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3)$$

$$= \iint_S (A^{*}\nu_1^{*}\mathrm{d}S^{*} + A^{**}\nu_1^{**}\mathrm{d}S^{**}) \quad (10.1\text{-}2)$$

式中各量的星号可以略去，因为它仅表示在面积分中按惯用符号所取的 A 和 ν_1 的适当值。故方程(10.1-1)的右端可简写为 $\int_S A\nu_1\mathrm{d}s$，如把左端的体积分写成 $\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}V$，则有：

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_1}\mathrm{d}V = \int_S A\nu_1\mathrm{d}S \quad (10.1\text{-}3)$$

式中dV和dS分别代表V和S的元素。类似的论证适用于$\partial A/\partial x_2$或$\partial A/\partial x_3$的体积分。因此，可得高斯定理

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S A\nu_i dS, \qquad (i = 1,2,3) \qquad (10.1\text{-}4)$$

该公式适用于任何一个凸的正则区域或能分解为有限个凸正则区域的任意区域。

现在考虑一张量场$A_{jkl\cdots}$。设具有边界S面的区域V在$A_{jkl\cdots}$的定义域内。又设每一个$A_{jkl\cdots}$的分量都在区域V内连续可微。则方程(10.1-4)可适用于此张量的每一个分量，从而可得具有普遍性的结论

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\cdots} dV = \int_S \nu_i A_{jkl\cdots} dS \qquad (10.1\text{-}5)$$

这是应用数学中最有用的定理之一。

拉格朗日(1762)，高斯(1813)，格林(1828)和奥斯道格拉德斯基(1831)都曾用不同形式得出这个定理。在美国最常见的叫法是格林定理或高斯定理。

例1　设v_i表示一向量，按(10.1-5)式，令$A_i = v_i$，ν_i为S面上的法向量

$$\int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV = \int_S v_i \nu_i dS \qquad (10.1\text{-}6)$$

如果将坐标x_1, x_2, x_3写成x, y, z，把分量v_1, v_2, v_3写为u, v, w；并把S面的外法线方向余弦ν_1, ν_2, ν_3写为l, m, n，则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (lu + mv + nw) dS \qquad (10.1\text{-}7)$$

另一个常见的表示为用$\boldsymbol{v}$表示向量，用$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$表示向量的数量积$v_i \nu_i$，并定义

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (10.1\text{-}8)$$

则(10.1-7)式成为

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{v} dv = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} dS \qquad (10.1\text{-}9)$$

方程(10.1-6),(10.1-7),(10.1-9)是高斯定理最常见的形式。

例2 如果 A 表示势函数 ϕ,则方程(10.1-3)通常写为向量形式

$$\int \operatorname{grad}\phi \mathrm{d}V = \int_S \nu\phi \mathrm{d}S$$

例3 令 e_{ijk} 为置换张量,则

$$\int e_{ijk}u_{k,j}\mathrm{d}V = e_{ijk}\int u_{k,j}\mathrm{d}V = e_{ijk}\int u_k\nu_j\mathrm{d}S = \int e_{ijk}u_k\nu_j\mathrm{d}S$$

即

$$\int \boldsymbol{curl u}\mathrm{d}V = \int \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}\mathrm{d}S$$

10.2 连续介质运动的物质描述

选择一固定参考系 $O-x_1x_2x_3$。设在时间 $t=t_0$ 时某质点的位置为 $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $x_3=a_3$。采用 (a_1,a_2,a_3) 作为该质点的标志。质点随时间的变化而运动。该质点位置的变化情况为

$$x_1 = x_1(a_1,a_2,a_3,t)$$
$$x_2 = x_2(a_1,a_2,a_3,t)$$
$$x_3 = x_3(a_1,a_2,a_3,t)$$

其参考系仍为同一参考系。上面三式也可简写为

$$x_i = x_i(a_1,a_2,a_3,t) \qquad (i = 1,2,3) \qquad (10.2\text{-}1)$$

如果对物体中每个质点写出的上述方程都是已知的,就可知道整个物体运动随时间的变化过程。从数学上来说,方程(10.2-1)确定了以时间 t 作为参数,从区域 $D(a_1,a_2,a_3)$ 到区域 $D'(x_1,x_2,x_3)$ 的变换或映射。图 10.2 表示了这样一个例子。如果映射是连续且一一对应的,即对每一个点 (a_1,a_2,a_3) 有一个也仅有一个点 (x_1,x_2,x_3) 与之对应,反之亦然,并且 $D(a_1,a_2,a_3)$ 中的相邻点亦映射为 $D'(x_1,x_2,x_3)$ 中的相邻点的话,那么函数 $x_i(a_1,a_2,a_3,t)$ 必是单值、连续和连续可微的,且区域 D 内雅可比行列式必定不会为零。

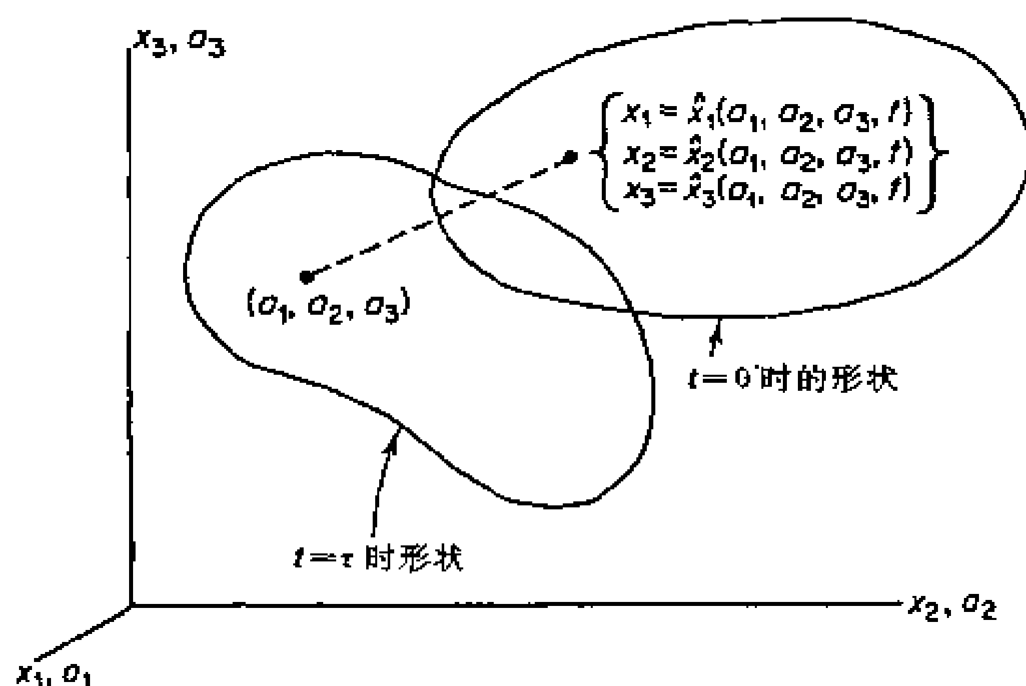


图 10.2　质点的标志

映射(10.2-1)式称为物体运动的物质描述。在物质描述中，质点(a_1,a_2,a_3)的速度和加速度分别为：

$$v_i(a_1,a_2,a_3,t) = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{(a_1,a_2,a_3)} \tag{10.2-2}$$

$$a_i(a_1,a_2,a_3,t) = \left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{(a_1,a_2,a_3)} = \left.\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\right|_{(a_1,a_2,a_3)} \tag{10.2-3}$$

质量守恒可以表示为：令 $\rho(\boldsymbol{x})$代表 $\boldsymbol{x}$ 处的物质密度，此处符号 $\boldsymbol{x}$ 表示(x_1,x_2,x_3)。令：$\rho_0(\boldsymbol{a})$为 $t=0$ 时刻，点(a_1,a_2,a_3)处的物质密度。那么在 $t=0$ 时，体积 V 中所包含的物质质量为

$$\int_D \rho_0(\boldsymbol{a})\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\mathrm{d}a_3,$$

而在 t 时刻为

$$\int_{D'} \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

则质量守恒由如下公式表示

$$\int_{D'} \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int_D \rho_0(\boldsymbol{a})\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\mathrm{d}a_3 \tag{10.2-4}$$

式中两个积分是对相同的质点群积分。由于

$$\int_{D'} \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = \int_{D} \rho(\boldsymbol{x}) \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right| \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \mathrm{d}a_3 \quad (10.2\text{-}5)$$

式中$\left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right|$是变换的雅可比行列式，即矩阵$\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)$的行列式：

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial a_1 & \partial x_1/\partial a_2 & \partial x_1/\partial a_3 \\ \partial x_2/\partial a_1 & \partial x_2/\partial a_2 & \partial x_2/\partial a_3 \\ \partial x_3/\partial a_1 & \partial x_3/\partial a_2 & \partial x_3/\partial a_3 \end{vmatrix} \quad (10.2\text{-}6)$$

将(10.2-5)式代入(10.2-4)式，并注意到此结果适合于任一区域D，因而被积函数必然相等，即

$$\rho_0(\boldsymbol{a}) = \rho(\boldsymbol{x}) \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right| \quad (10.2\text{-}7)$$

类似地有

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \rho_0(\boldsymbol{a}) \det \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right|$$

这些方程建立了从一个位形向另一个位形变化中物体处于不同位形的密度关系。

因此，连续介质的物质描述沿用了质点力学中采用的方法。

10.3 连续介质运动的空间描述

在物质描述中，每个质点可由其在某一给定瞬时t_0的坐标确定。但这并不总是很方便的。当描述河里的水流动时，并不希望弄清楚每个水质点的来龙去脉。而通常感兴趣的却是瞬时速度场及其随时间的变化规律。这就是在水动力学中一贯采用的空间描述。把空间位置(x_1, x_2, x_3)和时间t取为独立变量。由于空间描述便于测量，并能直观解释某位置处的情况而不跟踪某个具体质点，故在水动力学中很自然地采用这种方法。

空间描述中，用速度向量场$v_i(x_1, x_2, x_3, t)$来描述连续介质的瞬时运动，当然，该速度是指在时刻t、位置(x_1, x_2, x_3)处质点的瞬时速度。质点的瞬时加速度为

$$\dot{v}_i(x,t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(x,t) + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x,t) \tag{10.3-1}$$

式中 x 仍代表变量 x_1, x_2, x_3，同时式中每个量都是在 (x,t) 上计算的。

(10.3-1)式的证明如下：

设某质点在 t 时刻位于 (x_1, x_2, x_3) 处，当时间为 $t+\mathrm{d}t$ 时，它移到坐标为 $x_i + v_i\mathrm{d}t$ 点处，按泰勒定理，并当 $\mathrm{d}t \to 0$ 时，略去高阶无穷小项，可得

$$\begin{aligned}\dot{v}_i(x,t) &= v_i(x_j + v_j\mathrm{d}t, t+\mathrm{d}t) - v_i(x_j, t) \\ &= +\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_j}v_j\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这样就导出了(10.3-1)式。式中第一项可以解释为由于速度场的时间相关性所产生的结果，第二项为非均匀速度场中质点位置移动所起的作用。因而，分别把这两项称为局部加速度和迁移加速度。

导出(10.3-1)式的理由也适用于任何一个由质点运动所引起的函数 $F(x_1, x_2, x_3, t)$ 的变化，譬如温度。一个恰当的术语就是物质导数，由圆点"・"或符号 D/Dt 来表示。因此，任意函数 F 的物质导数为

$$\dot{F} = \frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x=\text{常数}} + v_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial F}{\partial x_3} \tag{10.3-2}$$

另一方面，如果通过变换式(10.2-1)将函数 $F(x_1, x_2, x_3, t)$ 变换为 $F(a_1, a_2, a_3, t)$，$F(a_1, a_2, a_3, t)$ 则确实是质点 (a_1, a_2, a_3) 的函数值。因此，F 的物质导数的确表示了质点 (a_1, a_2, a_3) 上函数 F 的变化率。形式上为

$$\dot{F} = \left.\frac{\partial F(a_1, a_2, a_3, t)}{\partial t}\right|_a \tag{10.3-3}$$

把 $F(x_1, x_2, x_3, t)$ 看成 a_1, a_2, a_3, t 的隐函数时，则有

$$\dot{F} = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_x + \left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_t \left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_a + \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_t \left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_a + \left.\frac{\partial F}{\partial x_3}\right|_t \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_a \tag{10.3-4}$$

利用方程(10.2-2)可将此方程化为方程(10.3-2)。

10.4 体积分的物质导数

设 $I(t)$为函数 $A(\boldsymbol{x},t)$的体积分，$A(\boldsymbol{x},t)$定义在空间区域 $V(x_1,x_2,x_3,t)$上，且连续可微，$V(x_1,x_2,x_3,t)$，由一组给定的质点所占据。

$$I(t)=\iiint_V A(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \qquad (10.4\text{-}1)$$

此处 $\boldsymbol{x}$ 仍表示 x_1,x_2,x_3。由于被积函数 $A(\boldsymbol{x},t)$和区域 $V(\boldsymbol{x},t)$二者都是时间 t 的函数，故体积分 $I(t)$亦为时间 t 的函数。如果时间 t 改变，则 $I(t)$也随之改变。那么 $I(t)$对时间 t 的变化率是怎样的呢？回答是此变化率用 $\mathrm{D}I/\mathrm{D}t$ 表示，并称为 $I(t)$的物质导数，它被定义在一组给定质点上。

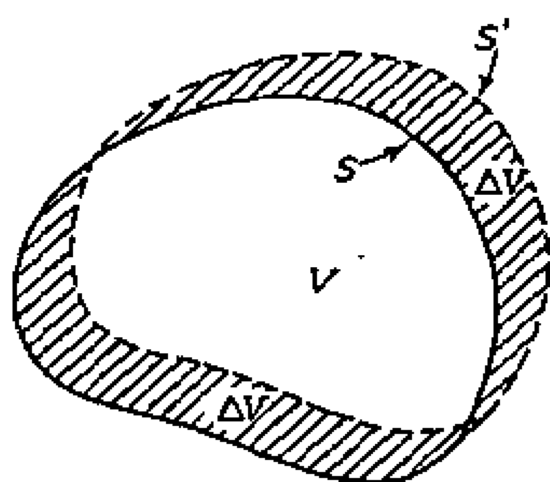


图 10.3 区域边界的连续变化

"对于给定的一组质点"这几个字极为重要。问题即是从物体本身来看 I 值的变化有多快。为计算该变化率，须注意到在 t 时刻物体的边界为 S，而到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻时已移到邻近界面 S'，此界面 S' 为区域 V'的边界(图 10.3)

I 的物质导数定义为

$$\frac{\mathrm{D}I}{\mathrm{D}t}=\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V'}A(\boldsymbol{x},t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}V-\int_V A(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V\right] \qquad (10.4\text{-}2)$$

注意到 V'和 V 的差别，令 ΔV 为区域 $V'-V$，ΔV 为表面 S 在很小时间间隔 Δt 内界面 S 所扫出的体积。由于 $V'=V+\Delta V$，(10.4-2)式可写为

$$\frac{\mathrm{D}I}{\mathrm{D}t}=\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}t}\left[\int_V A(x,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}V+\int_{\Delta V}A(x,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}V-\int_V A(x,t)\mathrm{d}V\right]$$

$$=\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\left\{\frac{1}{\mathrm{d}t}\int_V[A(x,t+\mathrm{d}t)-A(x,t)]\mathrm{d}V+\frac{1}{\mathrm{d}t}\int_{\Delta V}A(x,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}V\right\}$$

(10.4-3)

对于一连续可微的函数 $A(x,t)$，右侧第一项对 DI/Dt 贡献了值 $\int_V \partial A/\partial t \mathrm{d}V$。对后一项，注意到是对于一无穷小的 dt，则可以把边界表面 S 上的 $A(x,t)$ 取为被积函数（因为假定了 $A(x,t)$ 是连续的），同时还注意到积分等于边界 S 上所有质点在时间间隔 dt 内所扫过的体积与 $A(x,t)$ 乘积之总和。如果 ν_i 是沿界面 S 外法线方向上的单位向量，那么，由于边界上质点的位移为 $v_i\mathrm{d}t$，则边界 S 上面元 $\mathrm{d}S$ 所包含的质点扫过的体积为 $\mathrm{d}V=v_i\nu_i\mathrm{d}t$。忽略二阶以上的无穷小量，则该因素对 $\mathrm{D}I/\mathrm{D}t$ 的贡献为 $Av_i\nu_i\mathrm{d}S$。遍历整个 S 面积分，就得到总的贡献。因此

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V A\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial A}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_S Av_j\nu_j\mathrm{d}S \qquad (10.4\text{-}4)$$

用高斯定理变换最后一项积分，并使用(10.3-2)式，可得

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V A\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial A}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_V\frac{\partial}{\partial x_j}(Av_j)\mathrm{d}V$$

$$=\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial t}+v_j\frac{\partial A}{\partial x_j}+A\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}V$$

$$=\int_V\left(\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t}+A\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}V \qquad (10.4\text{-}5)$$

该重要公式将在以后各节中反复运用。由(10.4-5)式可见，求物质导数的运算与空间积分的运算两者间一般说来是不能进行变换的。

10.5 连续性方程

质量守恒定律已在10.2节中讨论过。用10.4节的结果，可写出该定律的另外一些形式。

设在时刻 t，包含在区域 V 内的质量为

$$m = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{10.5-1}$$

式中 $\rho=\rho(\boldsymbol{x},t)$ 为 t 时刻连续介质在 $\boldsymbol{x}$ 处的密度。质量守恒要求 $\mathrm{D}m/\mathrm{D}t=0$。如用 ρ 代替 A，就可由(10.4-4)式或(10.4-5)式给出物质导数 $\mathrm{D}m/\mathrm{D}t$。由于 $\mathrm{D}m/\mathrm{D}t=0$ 在任意区域都成立，故被积函数必须为零。因此，可得到质量守恒定律的另外一些表达式

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_S \rho v_j \nu_j \mathrm{d}S = 0 \tag{10.5-2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{10.5-3}$$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{10.5-4}$$

这些方程称为连续性方程。在不能假定 ρv_j 的可微性的情况时，可用积分式(10.5-2)。

在静力学问题中，这些方程恒可满足。因而必须用方程(10.2-7)或方程(10.2-8)表示质量守恒。

10.6 运动方程

牛顿定律说在一惯性参考坐标系中，物体线性运动动量的物质变化率等于各作用力的合力。

设在 t 时刻，包含在区域 V 内所有质点的线性运动动量为

$$D_i = \int_V \rho v_i \mathrm{d}V \tag{10.6-1}$$

如果物体受到表面力 $\overset{\nu}{T}_i$ 和单位体积体力 X_i 作用，其合力为

$$\mathscr{F}_i = \int_S \overset{\nu}{T}_i \mathrm{d}S + \int_V x_i \mathrm{d}V \tag{10.6-2}$$

根据柯西方程(3.3-2)，可用应力场 σ_{ij} 来表示表面力，因而 $\overset{\nu}{T}_i=\sigma_{ij}\nu_j$，式中 ν_j 为区域 V 的界面 S 上的外法线单位向量。用 $\sigma_{ij}\nu_j$ 代替(10.6-2)式中的 $\overset{\nu}{T}_i$，并用高斯定理将面积分变换成体积分，则有

$$\mathscr{F}_i = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) \mathrm{d}V \tag{10.6-3}$$

牛顿定律指出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \mathscr{P}_i = \mathscr{F}_i \tag{10.6-4}$$

因此，根据(10.4-5)式，使 A 等于 ρv_i，则有

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \right] \mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) \mathrm{d}V \tag{10.6-5}$$

由于该方程在任意一个区域 V 上都必须成立，所以方程两端的被积函数必须相等，因此有

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \tag{10.6-6}$$

上式左端等于

$$v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

根据连续性方程(10.5-3)，第一个括弧中的量应等于零，而第二个括弧内的量是加速度 $\mathrm{D}v_i/\mathrm{D}t$。因此，可得到著名的连续介质运动的欧拉方程。

$$\rho \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \tag{10.6-7}$$

在 3.5 节中所讨论的平衡方程是一特殊情况，它是在所有速度分量 v_i 都等于零的情况下得到的。

10.7 动量矩

角动量平衡定律用于静态平衡这一特殊情况时，就可以导出应力张量是对称张量的结论(见 3.5 节)。现在将证明角动量原理并未给连续介质运动的动力学方面带来附加限制，角动量原理指出：动量矩对某个原点的物质变化率等于所有的作用力对同一原点的合力矩。

设某时刻 t，一物体占据了边界为 S 的正则空间区域 V，它具

有对坐标原点的动量矩[见方程(3.3-2)]

$$\mathscr{H}_i = \int_V e_{ijk} x_j \rho v_k \mathrm{d}V \tag{10.7-1}$$

如果物体受到表面力$\overset{\nu}{T}_i$和单位体积力 X_i 的作用，则对原点的合力矩为

$$\mathscr{L}_i = \int e_{ijk} x_j X_k \mathrm{d}V + \int_S e_{ijk} x_j \overset{\nu}{T}_k \mathrm{d}S \tag{10.7-2}$$

将柯西公式$\overset{\nu}{T}_k = \sigma_{lk}\nu_l$ 代入到上式右端第二项积分中，并用高斯定理将其变换成体积分，可得

$$\mathscr{L}_i = \int_V e_{ijk} X_j X_k \mathrm{d}V + \int_V (e_{ijk} X_j \sigma_{lk})_{,l} \mathrm{d}V \tag{10.7-3}$$

欧拉定律指出，对任一区域 V，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \mathscr{H}_i = \mathscr{L}_i \tag{10.7-4}$$

按(10.4-5)计算 $\mathscr{H}_i$ 的物质导数，并利用(10.7-3)式，就可得到

$$e_{ijk} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(e_{ijk} x_j \rho v_k v_l) = e_{ijk} x_j X_k + e_{ijk}(x_j \sigma_{lk})_{,l} \tag{10.7-5}$$

上式中的第二项可写为

$$e_{ijk} \rho v_j v_k + e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_k v_l) = 0 + e_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_k v_l)$$

由于 e_{ijk}对 j、k 是反对称的，而 $v_j v_k$ 对 j、k 是对称的，方程(10.7-5)中的最后一项能写为 $e_{ijk}\sigma_{jk} + e_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}$。因此方程(10.7-5)变为

$$e_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_k v_l) - X_k - \sigma_{lk,l} \right] - e_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \tag{10.7-6}$$

根据运动方程(10.6-5)式，方括弧中的和为零，因此(10.7-6)式简化为

$$e_{ijk}\sigma_{jk} = 0$$

即，$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$，因此只要应力张量是对称的，动量矩平衡定律就自动满足。

10.8 能 量 平 衡

连续介质的运动还必须遵守能量守恒定律。如果在某个问题中机械能是唯一感兴趣的能量，那么该能量方程仅是运动方程的一次积分。如果热量过程很重要，则能量方程就成了一个需要被满足的独立方程。

能量守恒定律是热力学的第一定律。对于某个连续介质来说，只要列出能量和功的全部形式，就能导出该定律的表达式。考虑一个连续介质体，它有三种形式的能量：动能 K，重力势能 G 和内能 E，即

$$能量 = K + G + E \tag{10.8-1}$$

在某时刻 t，包含在某正则区域 V 内的动能为

$$K = \int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V \tag{10.8-2}$$

式中 v_i 是某质点所在体积元 $\mathrm{d}V$ 速度向量的分量，ρ 是物质的密度。重力势能与质量分布有关，并可写为

$$G = \int \rho\phi(x)\mathrm{d}V \tag{10.8-3}$$

式中，ϕ 是单位质量的重力势。在均匀重力场这一重要的特殊情况中，有

$$G = \int \rho g z \mathrm{d}V \tag{10.8-4}$$

式中，g 为重力加速度，z 是从某个确定的平面开始沿着与重力场相反方向所测的距离。内能写为如下形式

$$E = \int \rho\varepsilon \mathrm{d}V \tag{10.8-5}$$

式中，ε 是单位质量的内能。热力学第一定律表述为：通过吸收热量 Q 和对系统作功 W，能改变系统的能量

$$\Delta 能量 = Q + W \tag{10.8-6}$$

用变化率表示，则为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(K+G+E)=\dot{Q}+\dot{W} \tag{10.8-7}$$

式中，$\dot{Q}$和$\dot{W}$为单位时间内 Q 和 W 的变化率。

现在，只有通过边界才能把热量输入到物体内。为描述热流，定义热流向量 $\boldsymbol{h}$（它的分量为 h_1,h_2,h_3）如下：设 $\mathrm{d}S$ 为物体内的一个面元，它的单位外法线为 $\boldsymbol{\nu}$。如果热量以某速率沿 ν_i 方向通过 $\mathrm{d}S$ 面元传递，则将该速率表示为 $h_i\nu_i\mathrm{d}S$。如果介质处于运动中，并认定面元 $\mathrm{d}S$ 是由相同的质点所组成，则输入热流率为

$$\dot{Q}=-\int_S h_i\nu_i\mathrm{d}S=-\int_V\frac{\partial h_i}{\partial x_i}\mathrm{d}V \tag{10.8-8}$$

在 V 内单位体积的体力 F_i 和 S 面上的面力$\overset{\nu}{T}_i$以某速率对物体做功，即是功率

$$\begin{aligned}\dot{W}&=\int F_iv_i\mathrm{d}V+\int\overset{\nu}{T}_iv_i\mathrm{d}S\\&=\int F_iv_i\mathrm{d}V+\int\sigma_{ij}v_j\nu_i\mathrm{d}S\\&=\int F_iv_i\mathrm{d}V+\int(\sigma_{ij}v_i)_{,j}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{10.8-9}$$

由于(10.8-7)式中，G 项内已包含了重力能，所以在计算功率 $\dot{W}$ 时必须从体力 F_i 中除去重力部分。把方程(10.8-2)，(10.8-3)，(10.8-5)，(10.8-8)，和(10.8-9)代入热力学第一定律(10.8-7)式中，并用(10.4-5)式计算物质导数，通过一系列计算后，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{D}v^2}{\mathrm{D}t}+\frac{v^2}{2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\frac{v^2}{2}\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\rho\frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{D}t}+\varepsilon\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\\&+\varepsilon\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\rho\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}+\phi\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\phi\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}\\&=-\frac{\partial h_i}{\partial x_i}+Fv_i+\sigma_{ij,j}v_i+\sigma_{ij}v_{i,j}\end{aligned} \tag{10.8-10}$$

用连续性方程和运动方程

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,\qquad\rho=\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}=X_i+\sigma_{ij,j} \tag{10.8-11}$$

就能将(10.8-10)式大大地简化。此处 X_i 为单位质量的总体力，X_i

与 F_i 之差为重力，并由下式确定

$$X_i - F_i = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{10.8-12}$$

因为

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

同时，对一个不随时间变化的重力场有 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$，所以，利用(10.8-11)式和(10.8-12)式，对这个方程有：

$$\frac{1}{2}\rho \frac{Dv^2}{Dt} + \rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} + \sigma_{ij} v_{i,j} \tag{10.8-13}$$

但

$$\rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{2}\rho \frac{Dv^2}{Dt} \tag{10.8-14}$$

且

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})\right] = \sigma_{ij} V_{ij} + 0 \tag{10.8-15}$$

其中

$$V_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{10.8-16}$$

为应变率张量。因为(10.8-15)式中的最后一项为对称张量 σ_{ij} 与一个反对称张量的缩并，故它为零。这样方程(10.8-13)就能简化，最终可得到能量方程的如下形式

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} V_{ij} \tag{10.8-17}$$

特例：

(A)如果所有非机械能量的转移都是由于热传导所致，且遵从傅立叶定律

$$h_i = -J\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{10.8-18}$$

式中 J 为热功当量，λ 为传导系数，T 为绝对温度，则能量方程为

$$\rho \frac{\mathrm{D}\epsilon}{\mathrm{D}t} = J \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \sigma_{ij} V_{ij} \qquad (10.8\text{-}19)$$

(*B*)删去包含 ϕ,v_i 和 V_{ij}各项，同时使

$$\epsilon = JcT \qquad (10.8\text{-}20)$$

式中 c 为当变形率为零时的比热。就可得到静态连续介质中常用的热传导方程。即方程(10.8-19)成为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \qquad (10.8\text{-}21)$$

10.9 极坐标系中的运动方程和连续性方程

在 3.7 节和 5.8 节中曾分别研究过极坐标下的应力和应变分量。采用张量分析方法，笛卡尔坐标变换的方法，或由基本原理直接针对某个问题来推导，都同样能推导出相应的运动方程和连续性方程。下面说明上述中的后两种方法。

在 5.8 节中给出了直角坐标 x,y,z 与极坐标 r,θ,z 之间变换的基本方程式。如果把方程(3.7-5)代入平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (10.9\text{-}1)$$

即

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

等方程中，并用方程(5.8-3)来变换各个导数，就可得到

$$\left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial_z}\right)\cos\theta$$
$$- \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z}\right)\sin\theta = 0 \qquad (10.9\text{-}2)$$

因为该方程必须对所有的 θ 成立，所以在 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，就应分别有

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}=0 \qquad (10.9\text{-}3)$$

由于 x 方向的选择是任意的，这使(10.9-3)式必须对所有的 θ 值成立。类似地，取 $i=3$ 从方程(10.9-1)可得到第三个平衡方程式，

$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=0 \qquad (10.9\text{-}4)$$

如果连续介质承受加速度和体力，则运动方程(10.6-7)式为

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+X_i=\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}=\rho a_i \qquad (10.9\text{-}5)$$

单位体积上的体力可分解为 r,θ 和 z 方向上的分量 F_r,F_θ,F_z。加速度 $Dv_i/Dt=a_i$ 须细致地考虑。在直角坐标系中，x 方向的加速度分量为

$$a_x=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \qquad (10.9\text{-}6)$$

只要分别用 a 和 v 替换 u，就可以用联系位移的方程(5.8-4)分别把加速度分量 a_x,a_y,a_z 及速度分量 v_x,v_y,v_z 与它们的极坐标分量 a_r,a_θ,a_z 及 v_r,v_θ,v_z 联系起来。因此，将方程(5.8-3)和(5.8-4)代入(10.9-6)，就得到

$$\begin{aligned}
a_x=&\frac{\partial}{\partial t}(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\\
&+(v_r\cos\theta+v_\theta\sin\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\\
&+(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\\
&+v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\\
=&\cos\theta\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\\
&-\sin\theta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_rv_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)
\end{aligned} \qquad (10.9\text{-}7)$$

将方程(10.9-7)与下述方程比较

$$a_x=a_r\cos\theta-a_\theta\sin\theta \qquad (10.9\text{-}8)$$

可得到加速度分量：

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$$
$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \tag{10.9-9}$$

类似地，可得

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{10.9-10}$$

完整的运动方程为

$$\rho a_r = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + F_r$$
$$\rho a_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial z} + F_\theta \tag{10.9-11}$$
$$\rho a_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z$$

这些推导虽是直接了当的，但其物理意义并不清楚。第二种推导方法是基于通过考查作用于体积元上各个力的平衡，而使这些方程能得到进一步理解。图 10.4 是一个由应力模型表示的孤立体积元的自由体图。

运动方程表明，径向加速度等于所有作用于径向的力的总和，因此有

$$\rho a_r \mathrm{d}r\mathrm{d}z\left[\frac{r\mathrm{d}\theta + (r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta}{2}\right] = F_r \mathrm{d}r\mathrm{d}z\left[\frac{r\mathrm{d}\theta + (r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta}{2}\right]$$
$$+ (\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}\mathrm{d}r)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z - \sigma_{rr} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z - \sigma_{\theta\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$$
$$- (\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}z\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} + (\sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$
$$- \sigma_{r\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}\mathrm{d}z - \sigma_{rz}\right)\left[\frac{r\mathrm{d}\theta + (r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta}{2}\right]\mathrm{d}r \tag{10.9-12}$$

展开上式，并略去高阶无穷小量，同时再全部除以 r，就可得到方程(10.9-11)中的第一个方程。类似地可以得到其他方程式。应注

意到，在径向平衡方程中，$-\sigma_{\theta\theta}/r$ 项是具有环向应力性质的径向压力；σ_{rr}/r 是由于 $r+dr$ 处外表面面积大于半径 r 处外表面面积所造成的。同样的理由也适用于轴向平衡方程中的 σ_{rz}/r 项。切向方程中的 $2\sigma_{r\theta}/r$ 项由两个因素引起。一个因素与前述相同，即外表面大；另一个因素是由于 θ 和 $\theta+d\theta$ 的两径向面不平行，面有一夹角 $d\theta$。

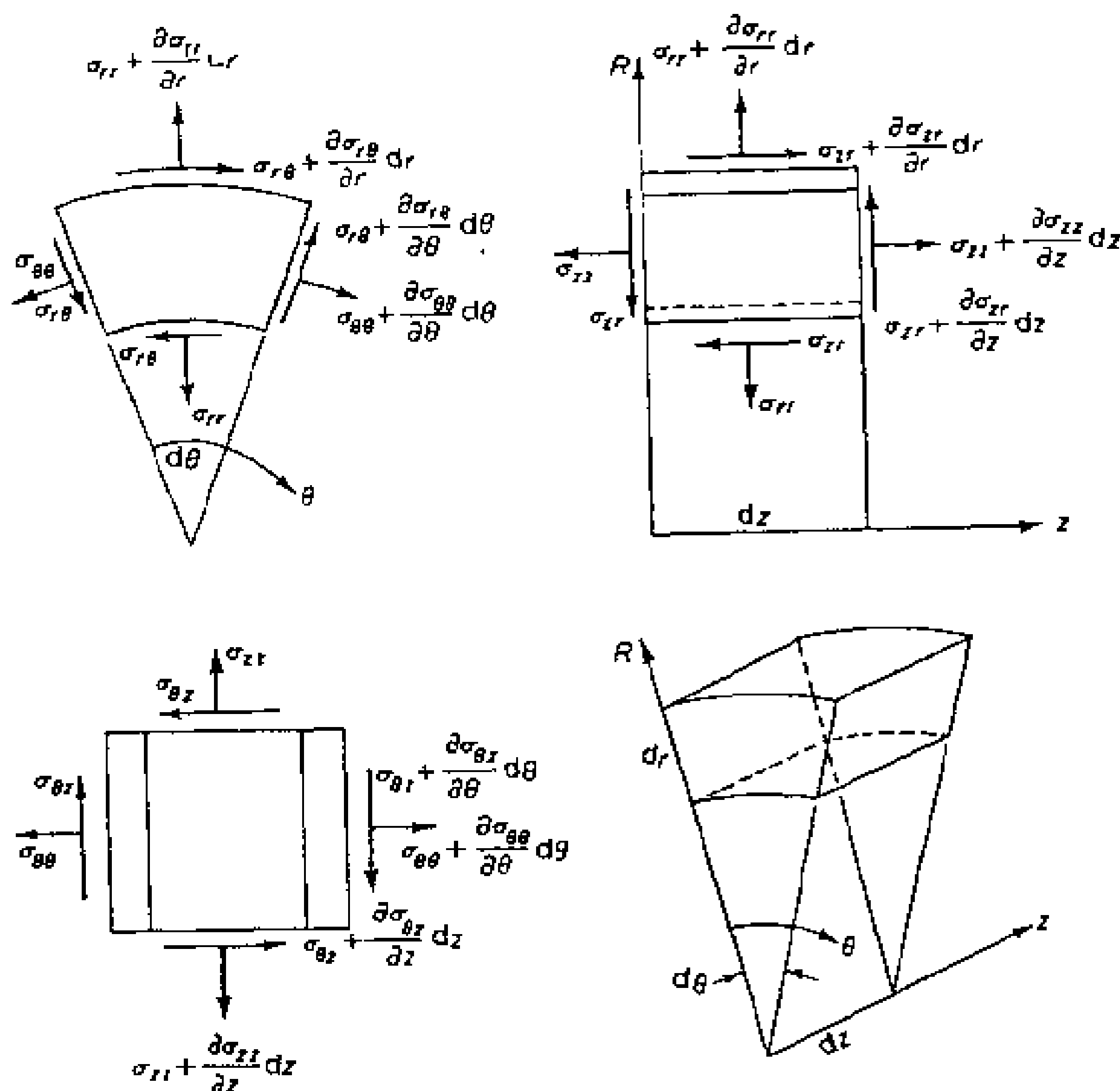


图 10.4 极坐标中的应力场

类似的图例可以用来说明加速度方程式中的各项。a_r 中的 $-v_\theta^2/r$ 项具有向心加速度的性质。a_θ 中的 $v_\theta v_r/r$ 项是由于径向速度向量 v_r 的旋转所引起的加速度的切向分量。

类似的处理方法也能将连续性方程(10.5-3)式变换为极坐标

形式。研究一下图 10.5 所示体积元中质量流的平衡可能最说明问题。由质量流流过的面积通过适当运算得到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \rho v_z}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \quad (10.9\text{-}13)$$

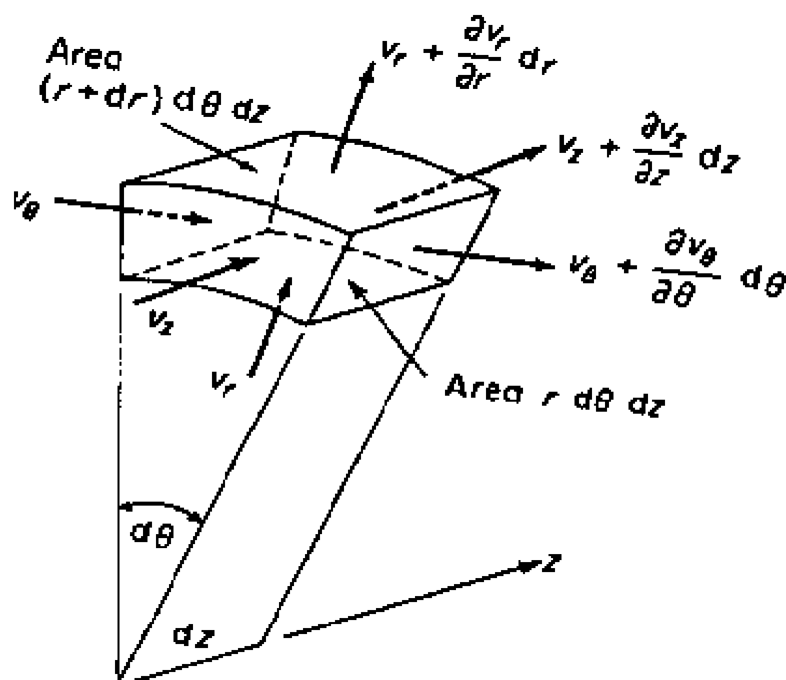


图 10.5　柱极坐标中的质量守恒

习　题 10

10.1　叙述下述定义：

(*a*)线积分；　(*b*)面积分；　(*c*)体积分

10.2　叙述使方程(10.1-4)，(10.1-5)，(10.4-4)和(10.4-5)有效的数学条件。

10.3　求线积分　$\oint_c y^2 dx + x^2 dy$ 的值。式中 c 是以(1,0)，(1,1)，(0,0)为顶点的三角形。(参见下图)(答案：1/3)。

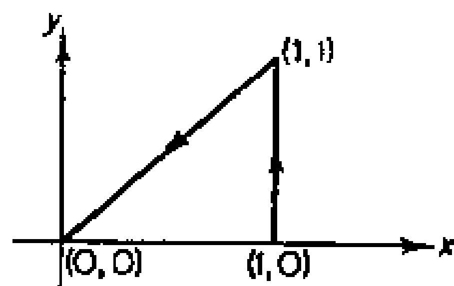


图 $P.10.3$　积分路径

10.4　求 $\oint_c (x^2-y^2)dS$ 的值，式中 c 是

$x^2+y^2=4$ 的圆。

10.5　推导格林定理：设 D 为 xy 平面域，并设 c 是在 D 域内逐段光滑的简单闭合曲线，其内部也在 D 域内。设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是 D 域为有定义、连续并具有一阶连续偏导数的函数，则

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中，R 是以 c 为边界的闭合区域。

10.6　用向量解释格林定理，推导下列定理

(a)　$$\oint_c u_T \mathrm{d}S = \iint_R \mathrm{curl}_z u \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(b)　$$\oint_c v_n \mathrm{d}S = \iint_R \mathrm{div} v \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中 u，v 是向量场，u_T 是 u 的切向分量（与曲线 C 相切），$\mathrm{d}S$ 为弧长；v_n 是 v 在曲线 C 上的法向分量。方程(a)是斯托克斯定理的特殊情况。方程(b)是高斯定理的二维形式。

10.7　一个迫降的飞行员在波涛汹涌的海面上向一橡皮气球迅速充气。设气球上的某个质点位于

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

用方程

$$F(t) = (x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2 - a^2 = 0$$

表示气球的表面。式中 $\lambda(t)$，$\mu(t)$，$\nu(t)$ 是球体的球心，$a(t)$ 是球体半径，它们都是时间的函数（见图 P10.7）

试证 $\mathrm{D}F/\mathrm{D}t=0$

导出绕球运动的空气和水的边界条件

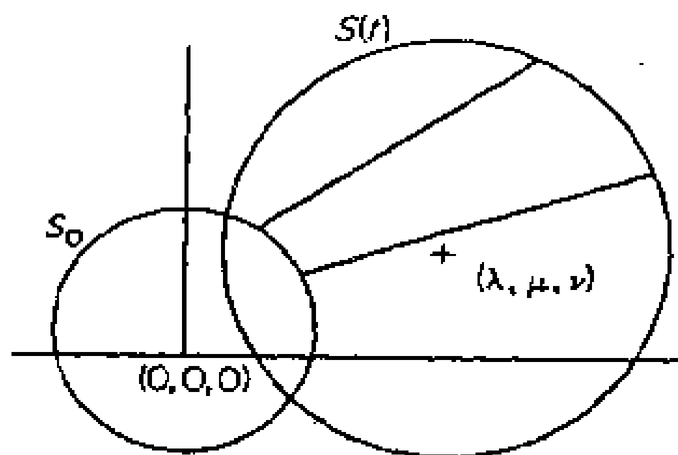


图 P10.7　膨胀的气球

解：由于任何时候表示气球表面的方程都是 $F(t)=0$，因此 $F(t)$ 对 t 的导数必定为零。由于 x，y，z 是质点的坐标，并且 $F(t)$ 在任何时候都与气球有关，所以时间导数就是物质导数，即 $\mathrm{D}F/\mathrm{D}t$，该导

数为零。

反之，由方程 $DF/Dt=0$，则对于给定的一组质点，$F=$常数。特别是当这组质点由方程 $F=0$ 所确定时，该质点组保持不变。如果 $F=0$ 在 $t=0$ 时刻确定了此气球，则在任何时间 t，F 都能确定此气球。

如果研究围绕气球的流体(空气和水)，该方程就显得更为重要。流体质点一旦和气球接触就会继续保持下去(这称为粘性流体与固体接触的无滑动条件)。因此流场的边界条件是 $F=0$ 和 $DF/Dt=0$。

10.8 在风中飘动的旗帜表面由方程

$$F(x,y,z,t)=0$$

所描述。写出旗帜对气流的约束的解析式。换句话说，给出边界面 $F=0$ 的形状，推导流动的边界条件。对于此问题，把空气作为非粘性流体考虑。

如果空气被当作粘性流体，会有什么差别?

解：与习题 10.7 一样，旗帜表面 $F=0$ 处气流的边界条件为

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u_x\frac{\partial F}{\partial x}+u_y\frac{\partial F}{\partial y}+u_z\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{u}(u_x,u_y,u_z)$ 为速度向量。对于表面 $F(x,y,z,t)=0$ 来说，与之垂直的向量 $\boldsymbol{n}$ 具有分量

$$\frac{\partial F}{\partial x},\qquad \frac{\partial F}{\partial y},\qquad \frac{\partial F}{\partial z},$$

因此，方程(1)可写为

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{2}$$

此式意味着在旗帜表面上的法向速度必定等于 $-\partial F/\partial t$。

对于粘性流体，除 $F=0$ 外，还要加上无滑动条件。(参见 11.2 节的讨论)。

10.9 已知在 $-2\leqslant x,y,z\leqslant 2$ 域区流体速度场的两个分量分别为

$$u=(1-y^2)(a+bx+cx^2)$$

$$w=0$$

该流体是不可压缩的。y 轴方向的速度分量 v 是多少?

10.10 设流体温度场为

$$T=T_0e^{-kt}\sin\alpha x\cos\beta y$$

求位于原点 $x=y=z=0$ 处质点温度的物质变化率。同样求出 $x=y=z=1$ 处质点的情况。

10.11 对于各向同性的牛顿粘性流体，试导出以速度分量表示的运动方程。

10.12 设一运动中的连续介质单位质量的熵为 $s(x_1,x_2,x_3,t)$，其质量密度为 $\rho(x_1,x_2,x_3,t)$。速度场为 $v_i(x_1,x_2,x_3,t)$。试求在某一确定时间和体积内该介质的总熵。以体积分形式写出包含在该体积内物质总熵的变化率。

11 流体力学的场方程和边界条件

现在已有足够的基本方程来处理更为广泛的问题了。在所接触的范围内，绝大部分物体是连续体，它们的运动服从质量、动量和能量守恒定律。有了适当的本构方程和边界条件，就能用数学方法描述很多物理问题。本章中，将说明流体一些流动问题的公式。

11.1 纳维叶-斯托克斯(Navier-Stokes)方程

首先推导牛顿粘性流体流动所遵守的基本方程。设 x_1, x_2, x_3 或 x, y, z 为笛卡尔直角坐标系。用 v_1, v_2, v_3 或 u, v, w 分别表示沿 x, y, z 轴方向的速度分量。用 p 表示压力；σ_{ij} 或 σ_{xx}, σ_{xy} 等表示应力分量，μ 为粘性系数。此处及后面提及的所有拉丁字母下标的范围都是 1，2，3。那么由方程(7.3-3)式所给出的应力-应变率的关系为：

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda V_{kk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (11.1\text{-}1)\end{aligned}$$

即

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (11.1\text{-}1a)$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

将这些式子代入运动方程(10.6-7)式中，便得到纳维叶-斯托克斯方程

$$\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \quad (11.1\text{-}2)$$

式中 X_i 表示单位质量的体力。

上式中的速度分量必须满足由质量守恒定律导出的连续性方程(10.5-3)式。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (11.1\text{-}3)$$

除这些方程外，连续介质还有热力学状态方程、能量平衡方程和热流方程。

如果流体是不可压缩的，则

$$\rho = 常数 \quad (11.1\text{-}4)$$

且不需要明显地引入所有热力学方面的考虑。如果仅限于考虑不可压缩的均质流体，则连续性方程变为

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (11.1\text{-}5)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

同时，纳维叶-斯托克斯方程简化为

$$\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k} \quad (11.1\text{-}6)$$

详细写为

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$$

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v \qquad (11.1\text{-}7)$$

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w$$

式中 $\nu=\mu/\rho$ 为运动粘度，∇^2 是拉普拉斯算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (11.1\text{-}8)$$

方程(11.1-5)和(11.1-6)是不可压缩粘性流中出现的关于四个变量 u、v、w 和 p 的四个方程。

纳维叶-斯托克斯方程的求解是流体力学的中心问题。该方程包括了极大范围内的物理现象，在科学和工程上有广泛的应用，由于该方程是非线性的，故在一般情况下很难解出。

为完整地描述一个问题，还必须确定边界条件。在 11.2 节将研究固体—流体交界面上的无滑动条件。在 11.3 节将研究"自由"界面条件或称为流体—流体交界面条件，在此情况下，表面张力扮演着重要角色。紧接着将介绍量纲分析，用以说明雷诺数的意义。然后将研究水槽或管道中的层流流动，以作为能够忽略非线性项的简化解的一个例子。由于涡流可能出现，该解有其适用范围，在 11.5 节将讨论雷诺的经典实验。

在某些情况下，流体的粘性可以完全忽略，则所处理的就是理想流体了。与之相适应，边界条件也必须改变：因为微分方程阶数太低，无法满足粘性流体的所有边界条件。因之，须放弃固体—流体交界面上的无滑动条件，并略去自由面上任何剪切梯度的要求。这样做的结果，有时得到的数学形式很简单，但物理解释却很困难。

11.2 固体—流体交界面处的边界条件

如果固体是不可渗透的，则在固体—流体界面上所必须满足的边界条件之一就是流体不能渗透进固体。大多数流体容器都具备这一特性。用数学语言讲，就是要求垂直于固体表面流体的相对速度分量必须等于零。

关于流体相对于固体的切向速度分量的确定则须特别小心。在粘性流体与固体边界的交界面上，通常采用无滑动条件假设。换句话说，在固体—流体边界上，流体速度与固体速度应完全相等。经过很长的理论和实验结果比较的历史发展，这一概念才被认识到。

如果固体边界是静止的，无滑动条件要求速度从界边处的零连续地变化到一定距离以外自由流动值。这个边界条件和无粘性流体的相应边界条件形成鲜明对照，对于无粘性流体，只能规定流体不会渗进固体表面，但必须允许流体在固体边界上滑动，从而流体在界面上的切向速度可以不同于固体界面的速度。这是一个完全没有粘性的理想结果。图 11.1 表示了这个差异。图 11.1(*a*)表示无粘性流体流过一个静止固体的情况，在边界面上流体以一切向速度流过固体。图 11.1(*b*)表示粘性流体在边界面上的速度必须为零。

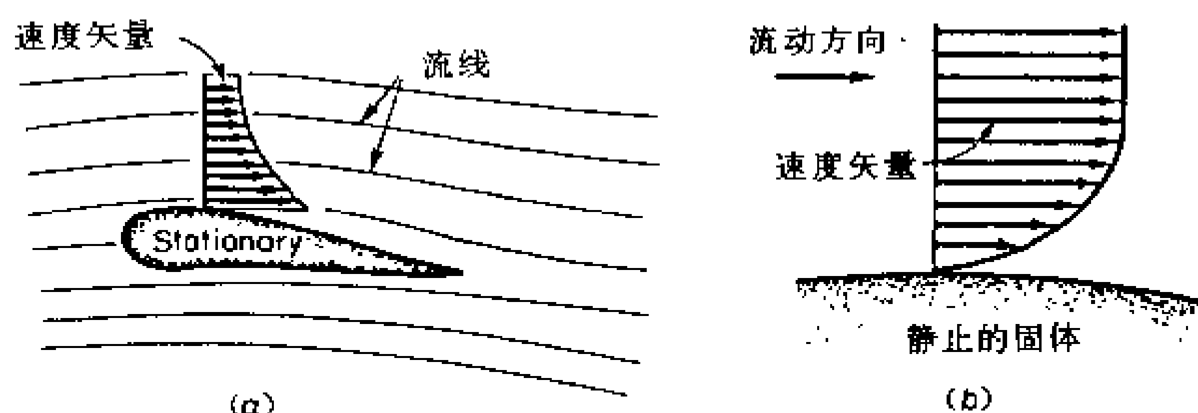


图 11.1 理想流体和实际流体流过固体时边界条件之差异

(*a*)理想流体；(*b*)实际流体

既然无滑动条件对所有实际流体都适用而不论其粘性多么小，所以图 11.1(b)适用于所有实际流体。

对于图 11.1(a)所示的翼型流场图，由风洞实验知，它很好地表示了该翼型的流场，即除紧贴固体壁面的邻近区域外，其他区域的流动与无粘性空气流动的情况相同。然而尽管粘性很小，空气仍是有粘性的，因此无滑动条件在此处是适用的。那么怎样解决这个矛盾呢？

当代流体力学的成就之一，就是回答了这个问题和解决了这个矛盾。现代观点认为图 11.1(b)所表示的就是发生在紧贴固体界面处极小区域内的情况。图 11.1(b)实际上是紧贴界面处极小区域内所发生情况的放大图。这个区域就是边界层。在边界层外流动几乎是无粘性的。在翼型的尖锐后缘处，可以看到边界层所引起的引人注目的重要作用。它要求流动必须平滑地离开尖端后缘，而不会在速度场中产生不连续。如果仍认为是理想的无粘性流动，则后缘的上表面和下表面的切向速度在尖端可以不同。在无粘性流动理论中，可以通过以无限大速度绕过尖端的流动来消除这一不连续，或者通过引入确定数值的环量后使后缘成为一个驻点，来消除不连续现象。后一种情况是由德国数学家库塔(1902)和俄国数学家儒可夫斯基(1907)提出的，称为库塔一儒可夫斯基假设。这个假设是现代飞行理论的基础。由此可见，不管其粘性多小，流体的粘性对于流动都有深远的影响。

但是怎样才能相信无滑动条件呢？这个条件又是建立在什么样的基础上的呢？气体分子理论并未提供肯定的答案。纳维叶(1823)用分子论假设推导了流体在固体壁面上的边界条件为 $\beta u=\mu\dfrac{\partial u}{\partial n}$，式中 u 是速度，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$是 u 沿壁面外法线方向的导数，β 是常数，μ 是粘性系数。比值 μ/β 是一个长度量。如果没有滑动，该长度应为零。麦克斯韦(1879)计算了 μ/β，认为该比值是气体分子平均自由程 L 的适当倍数约为 $2L$。该结论与现代实验结果相一致。由于地球表面室温下气体分子的平均自由程约为 5×10^{-8}m，因此可

以认为对于尺度在 10^{-6}m 范围内的微机械，无滑动条件可以作为问题提出来。而对于尺度在纳米范围的纳米机械，则根本不适用。

在大气压力下厘米级物体上流动的液体和气体的实验证实了无滑动条件的正确性。库伦(1800)在测量水中振荡金属盘的阻力时发现，给金属盘面涂上油脂，或表面覆盖岩石粉末，而测得的阻力几乎没有什么变化，似乎表面性质对阻力没有什么影响。伯肃叶(1841)和哈根(1839)获得了水在直径为 10～20μm 毛细管内流动的精确数据，斯托克斯计算了基于无滑动流动的理论结果，表明与伯肃叶的实验完全吻合。其他，譬如威撒姆(1890)和科埃特(1890)等人的实验也证实了同样的结论。费格和汤森德(1932)用高倍显微镜观察带有小颗粒的水流，证实了无滑动条件。此外，斯托克斯和奥辛的小雷诺数运动理论，泰勒对旋转圆筒间流动稳定性的计算和观察，在理论和实验上都是一致的。总的说来，所有的实验都支持这样一个结论：对液体来说，如果在固体边界面上发生了滑动的话，这个滑动也是小得难以观察到，或者说，与理论导出的结果没有什么区别。

11.3 两种流体交界面上的表面张力和边界条件

在两种流体的交界面上可能形成具有特殊化学成分和力学性质的膜。例如，空气中的一个肥皂泡有一表面活性剂表面层。肺泡表面有一含有表面活性剂表层，该表层可降低肺组织与肺内空气间的表面张力。一个胆固醇小泡可以有一单分子或双分子的磷脂层覆盖在其表面上。细胞的膜是脂双层膜。即使是在暴露于空气中的水的自由表面，其表面上的水分子也不

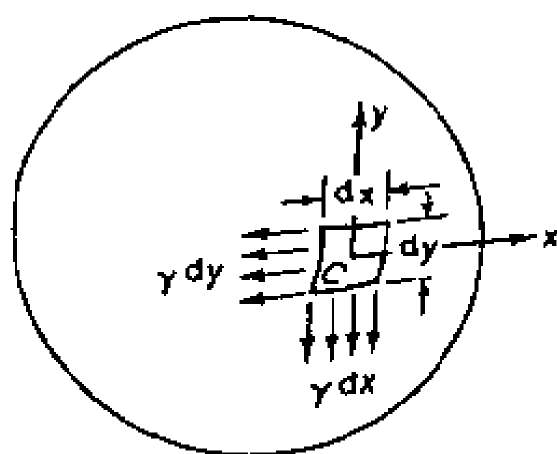


图 11.2 肥皂泡

是与内部的水分子处于同样状态，该表面可被看作是另一种物质的一层。因此，如果研究被一表面分开的两种流体的流动，流体的边界条件中必须把交界面上的性质考虑进去。

膜是一非常薄的壳，在 1.11 节已经讨论过壳的应力（见例 4，图 1.6），如果壳非常薄，则膜上每单位长度的合力是更为关注的问题，而厚度方向上的应力分布就不那么重要了。在薄膜中，其平均应力和厚度所导致的结果称为合应力或表面张力，其单位为[力/长度]。

考虑空气中的一个肥皂泡，如图 11.2 所示。

它是有两个空气-液体交界面边界的液态薄层，具有表面张力。设表面张力是各向同性的。将两个界面表面张力的合力记为 γ。为了形成这样一个肥皂泡，就必须吹气以造成一比外界压力 p_0 大的内压

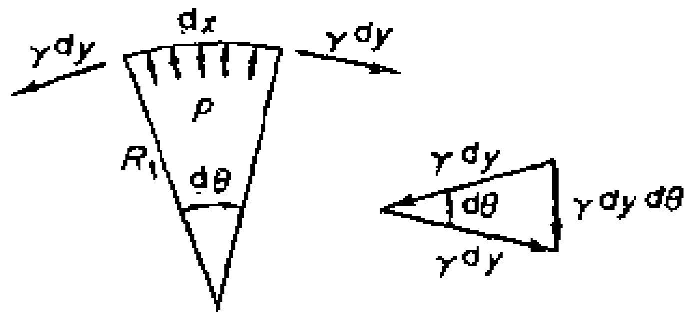


图 11.3　作用在肥皂泡面元上的薄膜的力平衡关系

p_i。由内外压差形成的力必须自皂泡膜面的张力所平衡。设 C 是肥皂泡表面上的一个封闭小矩形围线，其边长为 dx 和 dy（如图 11.2）。图中表示出作用于 C 线上各边的张力。为了计算与张力平衡的压力，考查两个剖面图：一个在 xz 平面内（z 垂直于肥皂膜表面），另一个在 yz 平面内。前者已表示在图 11.3 中，表面张力 γdy 作用在每条边上。

由于这些力与表面相切，因而具有垂直于肥皂泡膜表面的合力 $\gamma dy d\theta$。由于 $d\theta = dx/R_1$，式中 R_1 为肥皂膜的曲率半径，故法向力为 $\gamma dx dy/R_1$。相应地，作用于矩形其他两边上的张力合力为 $\gamma dx dy/R_2$。由于肥皂膜有两个空气—液体交界面（内侧和外侧），所以作用于曲线 C 的表面张力的合力是垂直于肥皂膜表面的，且等于 $2\gamma dx dy/R_1 + 2\gamma dx dy/R_2$。该力由压差乘以面积 $dx dy$ 的力所

平衡。使这些力相等，就可得到以拉普拉斯(1805)命名的著名肥皂膜方程式：

$$2\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=p_i-p_o \qquad (11.3\text{-}1)$$

实际上托马斯·杨(1804)一年以前已得出这一方程。

如果肥皂泡为球形，则 $R_1=R_2$，如果肥皂泡不是球形的，则可注意到

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\text{平均曲率} \qquad (11.3\text{-}2)$$

上式对任何表面相对于坐标旋转是不变量。因此，如何选择 x 轴和 y 轴的方向是无关紧要的。

作为一个特殊情况，考虑在压差趋于零下自边界曲面形成的肥皂泡膜。该表面称为最小表面，方程为

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0 \qquad (11.3\text{-}3)$$

方程(11.3-1)表明，如果半径 R_1, R_2 越来越小，则需要越来越大的压力来平衡表面张力。对于某个常值 γ，如果 $R_1, R_2 \to 0$，压差将趋于无穷大。

如果流体处于运动状态且流体间的界面是不稳定的，那么流体是真实流体(具有粘性)的话，无滑动边界条件须用于每一种流体的相关界面。如果其中有一种流体是理想流体(无粘性)，则对于这种流体就没有无滑动条件。如果两种流体都是理想流体，则没有关于滑动方面的限制。

在大多数通常所见的情况下，交界面具有特殊的表面粘度、表面压缩性、弹性和弯曲刚度。运动方程(平衡)和界面连续性与固体力学中的薄膜或薄壳是相同的。与界面接触处的边界条件是无渗透条件和无滑动条件。

在诸如发泡一类的化工问题中，在有关金属和岩石断裂的工程力学问题中，在肺毛细血管等生物学问题中，表面张力都是非常重要的，且在这些问题中，表面张力一般都是处于变化中的。例如，人体肺泡的表面是湿润的，且表面张力由“表活性剂”，卵磷脂之类

的类脂来调节。交界面上这些极化分子的排列取决于这些分子的密集度、表面上的应变率及应变史，以致当表面受到周期性的应变时，表面张力—面积关系变化曲线出现一很大的滞后环。图 11.4 给出了由克莱门茨用威尔赫米型表面平衡法所得到的实验结果。它表示了正常肺一面为空气，另一面为纯水、血浆、1%Tween20 洗涤剂及盐溶液几种情况下，表面张力—面积关系曲线。水和洗涤剂的回线用示意图夸大以表示应变史的循环特性。

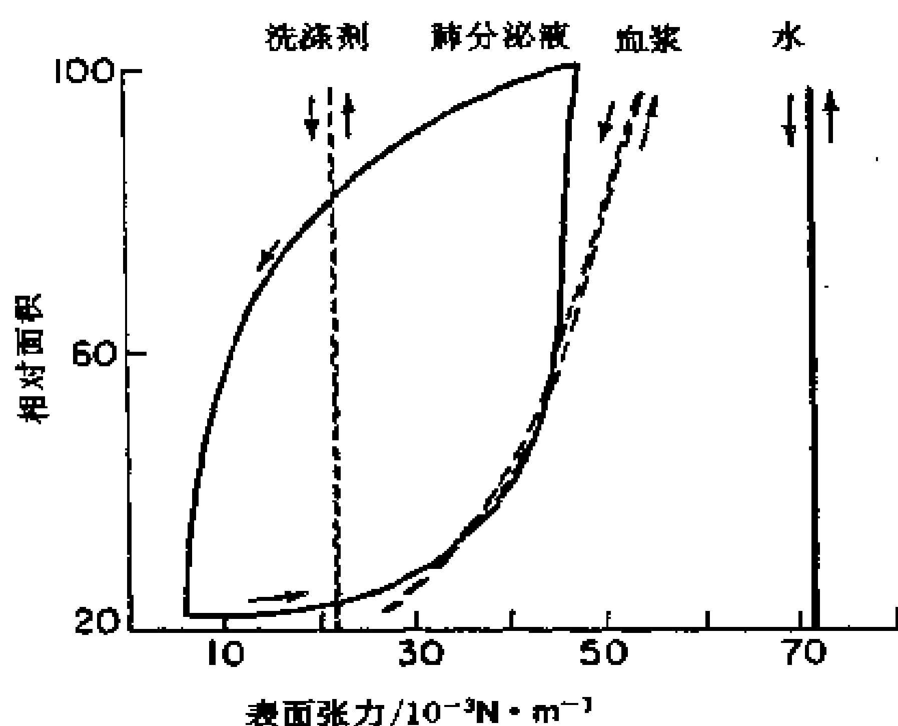


图 11.4　几种流体表面张力随应变的变化

摘自 J. A. Clements

"Surface Phenomena in Relation to Pulmonary Function"

The Physiologist 5.1 (1962), 11—28

11.4　动力相似性和雷诺数

将纳维—斯托克斯方程写成无量纲形式，为简单起见，考虑均匀不可压缩流体。选择一特征速度 V 和特征长度 L。例如，研究环绕机翼的空气流，可以取 V 为飞行速度，取 L 为机翼弦长。如果研究管内流动，就可取 V 为平均流速，L 为管的直径。对于一个落

球，可取 V 为下降速度，L 为球的直径等等。在选定特征量后，可引入无量纲变量

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad u' = \frac{u}{V}$$
$$v' = \frac{v}{V}, \quad w' = \frac{w}{V}, \quad p' = \frac{p}{\rho V^2}, \quad t' = \frac{Vt}{L} \tag{11.4-1}$$

及参数

$$雷诺数 = R_N = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \tag{11.4-2}$$

从而可以把不可压缩流体方程(11.1-7)式写为如下形式

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial z'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}$$
$$= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{R_N}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right) \tag{11.4-3}$$

将 u' 换成 v'，v' 换成 w'，w' 换成 u'，及 x' 换成 y'，y' 换成 z'，z' 换成 x'，就可从方程(11.4-3)得另外两个方程。连续性方程(11.1-5)也可写成无量纲形式

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \tag{11.4-4}$$

由于方程(11.4-3)和(11.4-4)构成了不可压缩流体完整的场方程组，所以，显然只有雷诺数 R_N 这个物理参数进入了流动的场方程组。

考虑两个几何相似的物体浸没在流动的流体中，它们的初始条件和边界条件相同。其中的一个物体是原形，另一个是模型。这两个物体是相似的(相同的形状，但尺寸不同)，并且边界条件相同(无量纲化后)。如果两个物体的雷诺数相同，则这两个流动是相同的，这是因为具有相同雷诺数的二个几何相似的物体遵守相同的微分方程组及边界条件(无量纲形式)。因此在相同雷诺数下，绕几何相似物体的流动是完全相似的，即在不同的流动中，函数 $u'(x', y', z', t')$，$v'(x', y', z', t')$，$w'(x', y', z', t')$ 和 $p'(x', y', z', t')$ 是彼此相同的。流动的这种相似称为动力相似。雷诺数控制了稳定

流动的动力相似。对于非稳定流动的微分方程及边界条件和初始条件的类似处理可获得相应的无量纲参数。

雷诺数表示惯性力与剪切力的比值。在流动中，迁移加速度引起的惯性力可从象 ρu^2 这样的项中得到，而剪切力可从 $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ 这样的项中得到，这些项更高的阶分别为

惯性力： ρV^2

剪切力： $\frac{\mu V}{L}$

的比值

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{剪切力}} = \frac{\rho V^2}{\mu V/L} = \frac{\rho VL}{\mu} = \text{雷诺数} \qquad (11.4\text{-}5)$$

雷诺数大表示惯性效应更为重要，雷诺数小表示剪切效应占支配地位。

实际问题中雷诺数的范围将由下边的例子加以说明。

11.5 水平槽或管内的层流流动

纳维—斯托克斯方程不易求解。然而如果能找到非线性项消失的特殊问题，有时其解还是很容易得到的。一个特别简单的问题就是在两平行平面间宽度为 $2h$ 的水平槽内不可压缩流体的定常流动，如图 11.5 所示。

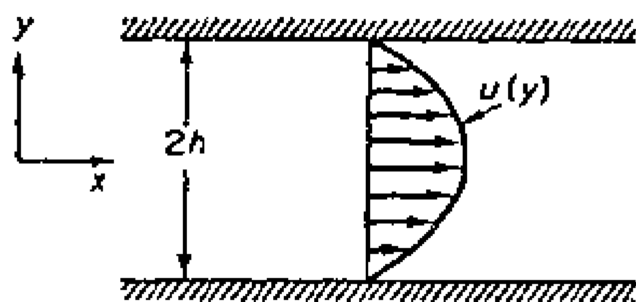


图 11.5 平行槽内的层流流动

寻找这样一个流动

$$u = u(y), \quad v = 0, \quad w = 0 \qquad (11.5\text{-}1)$$

它满足纳维—斯托克斯方程、连续性方程和在边界上无滑动的条件，边界为 $y = \pm h$：

$$u(h) = 0, \qquad u(-h) = 0 \qquad (11.5\text{-}2)$$

显然，(11.5-1)式完全满足连续性方程(11.1-3)式，而方程(11.1-7)式变为

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2} \tag{11.5-3}$$

$$0=\frac{\partial p}{\partial y} \tag{11.5-4}$$

$$0=\frac{\partial p}{\partial z} \tag{11.5-5}$$

方程(11.5-4)和(11.5-5)表明p仅仅是x的函数。如果将(11.5-3)式对x微分，并代入方程(11.5-1)，则可得出$\partial^2p/\partial x^2=0$。因此，$\partial p/\partial x$必定是常数，比如说为$-\alpha$。(11.5-3)立即变为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{\alpha}{\mu} \tag{11.5-6}$$

它有解：

$$\mu=A+By-\frac{\alpha}{\mu}\frac{y^2}{2} \tag{11.5-7}$$

常数A,B可由边界条件(11.5-2)式确定。最后的解为

$$u=\frac{\alpha}{2\mu}(h^2-y^2) \tag{11.5-8}$$

因此速度分布为一抛物线。

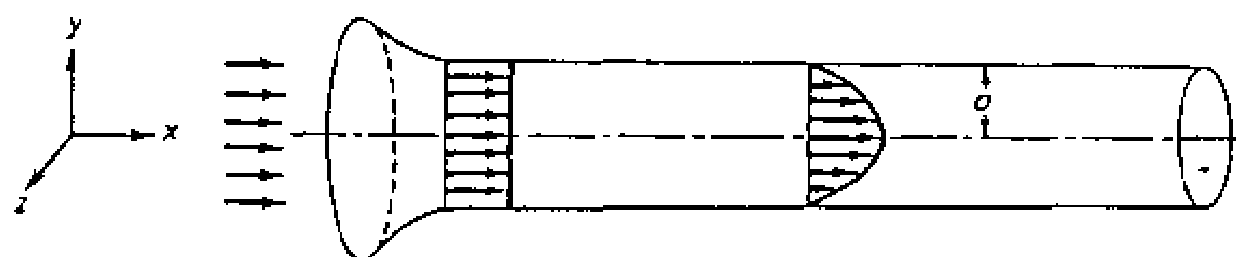


图 11.6 平直圆管层流流动

与之相应的另一个问题是流体流过半径为a的水平圆柱形直管的流动(见图 11.6)。寻求的是如下情况的解

$$u=u(y,z),\qquad v=0,\quad w=0,$$

与方程(11.5-6)相似，纳维一斯托克斯方程变为

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{\alpha}{\mu} \tag{11.5-9}$$

用 $r^2=y^2+z^2$ 可以很方便地将笛卡尔坐标 x,y,z 变换成柱坐标 x,r,θ，于是方程(11.5-9)变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-\frac{\alpha}{\mu} \quad (11.5\text{-}10)$$

假定该流动是轴对称的，从而 u 仅仅是 r 的函数，即 $\partial^2 u/\partial\theta^2=0$，该方程变为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{\alpha}{\mu} \quad (11.5\text{-}11)$$

可以直接积分得到

$$u=-\frac{\alpha}{\mu}\frac{r^2}{4}+A\log r+B \quad (11.5\text{-}12)$$

式中常数 A 和 B 由 $r=a$ 处的无滑动条件和对中心线 $r=0$ 的对称条件所确定

$$\text{在 } r=a \text{ 处，} \quad u=0 \quad (11.5\text{-}13)$$

$$\text{在 } r=0 \text{ 处，} \quad \mathrm{d}u/\mathrm{d}r=0 \quad (11.5\text{-}14)$$

最后的解是

$$u=\frac{\alpha}{4\mu}(a^2-r^2) \quad (11.5\text{-}15)$$

这就是著名的哈根—伯肃叶流的抛物线速度分布，其理论解是由斯托克斯给出的。

哈根—伯肃叶流的经典解经受了无数实验的检验。在管道入口处它不正确。在离入口处足够远的距离处是令人满意的，但如果管径太大或流速太高就又不正确了。在进口处附近的困难在于流动在该区域内属过渡性流动，因此，$v=0,w=0$ 的假设不成立。但雷诺数太大所带来的困难则是另一回事，此时的流动成为紊流！

雷诺在经典实验中证明了从层流向紊流的过渡，在该实验中他观察了在大水箱内通入一小水管的出口处的情况。在管的端口有一水阀，水阀可改变通过小水管流体的速度。管和箱的连接处做得很圆滑，同时在管的入口处引入一极细的墨水线。当水速低时，色线在整个管道的长度上都是清晰可辨的。当速度增加时，在某个确定的点上色线散开并扩散到整个剖面上(见图 11.7)。雷诺确定

了重要参数 $u_m d/\nu$（雷诺数），其中 u_m 是平均速度，d 是直径，ν 是运动粘度。雷诺发现，层流向紊流的转折发生在雷诺数2000～13000 之间，与入口处的光滑度有关。在极为精心的条件下，转折点的雷诺可推迟到高达 40 000。另一方面，对于一粗糙的入口条件，可能出现的最低转折雷诺数约为 2 000。

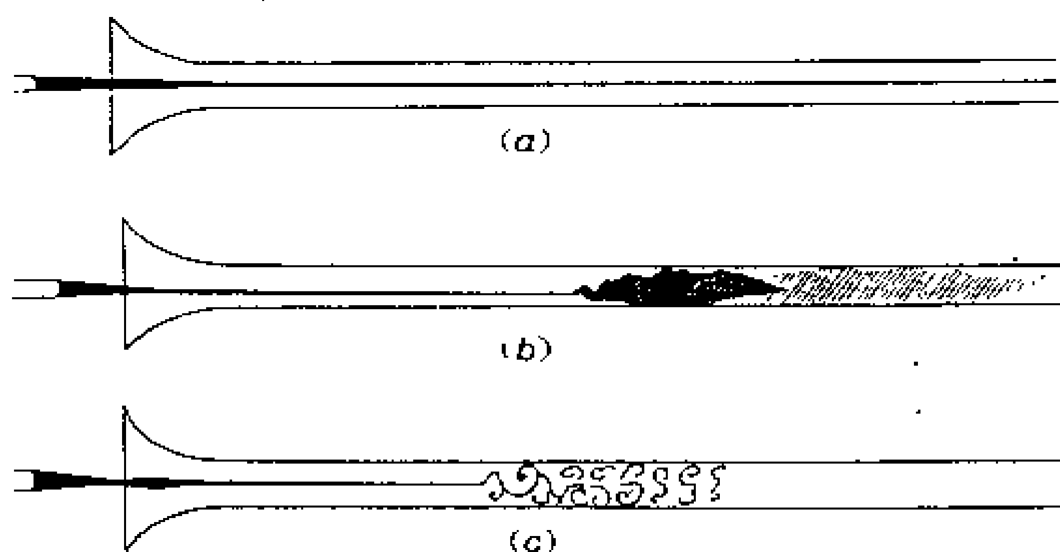


图 11.7 雷诺的紊流实验

(a)层流流动； (b)和(c)层流向紊流的转变

紊流是流体力学中最重要和最困难的问题之一。紊流在技术上的重要性，不仅是因为紊流影响表面摩擦，流动阻力，热的产生、传递和扩散等等，而且还由于它是普遍存在的。可以说流体流动的正常方式就是紊流。海洋里的水，地球表而上的空气和太阳内部的运动状态都是紊流。随着对流体力学学习的深入，紊流理论就会遇到。

11.6 边界层

如果让均匀不可压缩流体无量纲形式的纳维—斯托克斯方程(11.6-1)式中，即下式中

$$\frac{Du'_i}{Dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{R_N}\nabla^2 u'_i \qquad (i = 1,2,3) \quad (11.6\text{-}1)$$

的 $R_N \rightarrow \infty$，则除非二阶导数值变得很大，否则最后一项总可以略

去。在速度及其导数为有限值的一般流场中，当雷诺数趋于无限大时，粘性效应即不存在。然而，由于无滑动条件的关系，在固体壁面附近，流体的速度由自由流速变为固体速度时的变化梯度相当大。如果这个转变层很薄，即使雷诺数非常大，方程式(11.6-1)的最后一项也不能略去。

因而边界层的定义为即使雷诺数非常大时，粘性影响也是相当明显的那个流体区域。在边界层内，流动剪切应力项即方程(11.6-1)中的最后一项与迁移力项为同一数量级。基于对高速流动中边界层非常薄的这一实验现象，普朗特(1904)把纳维-斯托克斯方程简化为更容易处理的边界层方程。

为找出边界层方程的性质，考虑固定平板上的二维流动(见图11.8)。

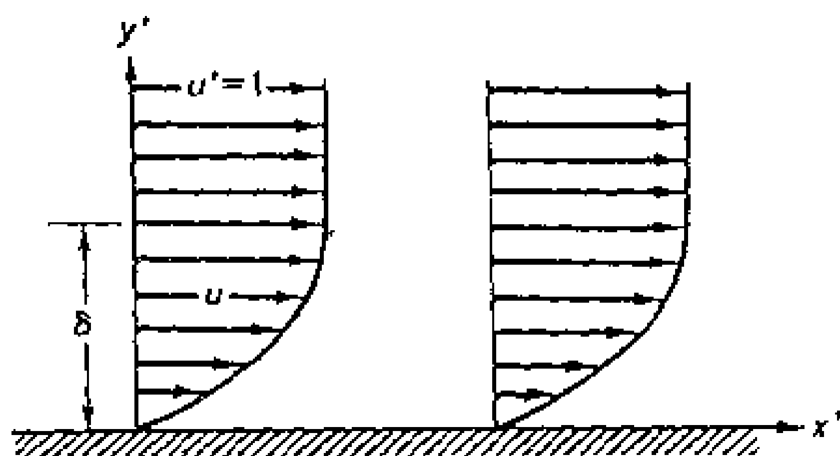


图 11.8　流动边界层

取 x' 轴为沿平板表面的流动方向。y' 与平板表面垂直。假定沿 z' 轴方向的速度分量 w 为零。则方程(11.6-1)变为

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{1}{R_N}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right)\tag{11.6-2}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'}+u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{1}{R_N}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right)\tag{11.6-3}$$

如果取自由流速为特殊速度，则自由流中(边界层外)无量纲速度

u'等于 1。速度 u' 从固体表面 $y'=0$ 处的 $u'=0$ 变化到 $y'=\delta$ 处的 $u'=1$，δ 表示边界层的厚度（δ 为无量纲量，且很小）。现在已能估算方程(11.6-2)中各项的数量级如下：用 $u'=0(1)$表示 u' 至多为1的量级。注意到$0(1)+0(1)=0(1)$，$0(1)\cdot 0(1)=0(1)$，$0(1)+0(\delta)=0(\delta)$，$0(1)\cdot 0(\delta)=0(\delta)$。那么，由于 u'随 t' 和 x' 的变化是有限的，故有

$$u'=0(1),\qquad \frac{\partial u'}{\partial x'}=0(1)$$
$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}=0(1),\qquad \frac{\partial u'}{\partial t'}=0(1) \tag{11.6-4}$$

由连续性方程(11.4-4)式，可有

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}=-\frac{\partial v'}{\partial y'}=0(1) \tag{11.6-5}$$

因此

$$v'=\int_0^\delta \frac{\partial v'}{\partial y'}\mathrm{d}y'\sim\int_0^\delta 0(1)\mathrm{d}y=0(\delta) \tag{11.6-6}$$

因此，垂直方向的速度至多为 δ 的量级，其数值很小，

$$\delta<<1 \tag{11.6-7}$$

根据方程(11.6-5)式，$v'=0(\delta)$而$\frac{\partial v'}{\partial y'}=0(1)$，则可看到在边界层中某个量对 y'的微分使之增加一个 $1/\delta$ 的量级，从而

$$\frac{\partial u'}{\partial y'}=0\left(\frac{1}{\delta}\right),\qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}=0\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \tag{11.6-8}$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x'}=0(\delta)\qquad \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}=0(\delta)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t'}=0(\delta)\qquad \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}=0\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

根据定义，在边界层内剪切应力项和惯性力项是同一个数量级。但由于(11.6-2)式左侧全为 $0(1)$，因此，右侧那些项也必须是 $0(1)$。具体地说，就是

$$0(1)=\frac{\partial p'}{\partial x'} \tag{11.6-9}$$

$$0(1) = \frac{1}{R_N}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) = \frac{1}{R_N}\left[0(1) + 0\left(\frac{1}{\delta^2}\right)\right]$$

因为括弧中的第一项远小于第二项，有

$$0(1) = \frac{1}{R_N}0\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$$

因此，

$$R_N = 0\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \qquad (11.6\text{-}10)$$

于是，可得到估算边界层厚度的式子

$$\delta = 0\left(\frac{1}{\sqrt{R_N}}\right) \qquad (11.6\text{-}11)$$

将方程(11.6-4)、(11.6-8)和(11.6-10)代入方程式(11.6-3)，可看到所有包含v'的项为$0(\delta)$；因此剩下的项$\partial p'/\partial y'$也必须为$0(\delta)$，于是

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0(\delta) \sim 0 \qquad (11.6\text{-}12)$$

换句话说，沿边界层厚度方向的压力近似为一常数。只保留量级为1的各项，纳维—斯托克斯方程简化为

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{R_N}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \qquad (11.6\text{-}13)$$

及方程(11.6-12)式，方程(11.6-13)是普朗特边界层方程；它所服从的边界条件是

$$u' = v' = 0, \qquad 当\ y' = 0\ 时 \qquad (11.6\text{-}14)$$
$$u' = 1, \qquad 当\ y' = \delta\ 时$$

11.7 平板上的层流边界层

作为普朗特边界层理论的应用，考虑不可压缩流体流过平板的情况，见图 11.9，该图放大了竖向尺度以使之更清楚。设边界层外侧的速度为常数 $\bar{u}$，需要求 $\partial u/\partial t=0$ 的稳态解。还需要一附加假设为：与边界层方程中的其他项相比，压力梯度 $\partial p/\partial x$ 可以忽

略不计，此证明见后。从而方程(11.6-13)成为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{11.7-1}$$

此时回到有量纲的物理量上来，各量都去掉一撇，则连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{11.7-2}$$

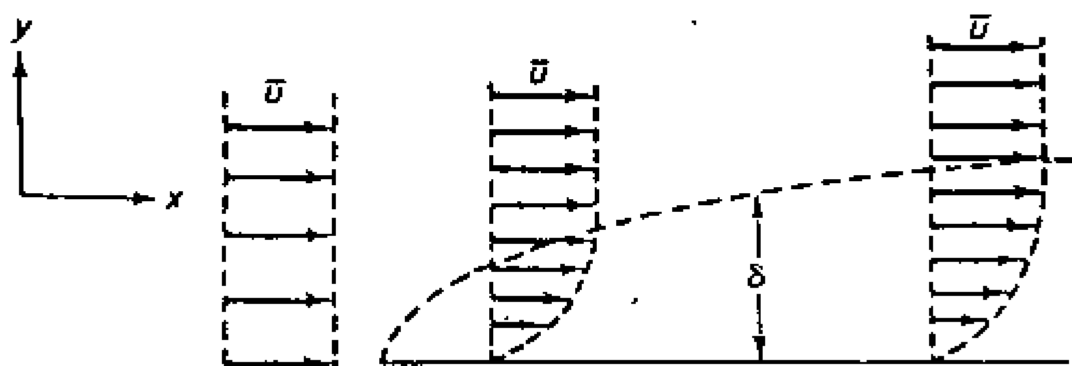


图 11.9 平板上的层流附面层，图中表示出它厚度的增加

如果 u,v 是由某个流函数 $\psi(x,y)$ 所导出：

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{11.7-3}$$

则方程(11.7-2)恒可满足，因而方程(11.7-1)就成为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{11.7-4}$$

其边界条件是：(*a*)在板上无滑动，(*b*)在边界层外与自由流连续，即

$$在\ y=0\ 时,u=v=0\ 或\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \tag{11.7-5}$$

$$在\ y=\delta\ 时,u=\bar{u},或\ -\frac{\partial\psi}{\partial y}=\bar{u} \tag{11.7-6}$$

仿照勃拉休斯来寻求一个“相似解”。考虑下列变换

$$\bar{x}=\alpha x,\quad \bar{y}=\beta y,\quad \bar{\psi}=\gamma\psi \tag{11.7-7}$$

式中 α,β 和 γ 是常数。如果选择 $\gamma=\alpha/\beta$，将方程(11.7-7)式代入到(11.7-4)式中，就可证明函数 $\bar{\psi}(\bar{x},\bar{y})$ 的方程和(11.7-4)式有着

相同的形式。与此类似，如果选择$\gamma=\beta$，代入到方程(11.7-6)中，可证明$-\partial\bar{\psi}/\partial\bar{y}=\bar{u}$。因此，根据$\beta=\alpha/\beta$，或$\beta=\sqrt{\alpha}$，有

$$\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}}=\frac{y}{\sqrt{x}},\qquad \frac{\bar{\psi}}{\sqrt{\bar{x}}}=\frac{\psi}{\sqrt{x}} \tag{11.7-8}$$

这些关系揭示了ψ应有如下形式的解，

$$\psi=-f(\xi)\sqrt{\nu\bar{u}x},\qquad \xi=\sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu}}\frac{y}{\sqrt{x}} \tag{11.7-9}$$

将(11.7-9)式代入(11.7-4)式中，得到常微分方程

$$2f'''+ff''=0, \tag{11.7-10}$$

式中一撇“′”代表对ξ的微分。该方程在边界条件

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f'(\infty)=1 \tag{11.7-11}$$

之下，已有了相当精确的数值解。该边界条件表示了板上$u=0$，$v=0$的条件以及边界层外$u\to$自由流速度$\bar{u}$的条件。从方程(11.7-9)式看出，对于一定的x/L，$\xi\to\infty$意味着y/L要比附面层厚度$\sqrt{\nu/L\bar{u}}$或δ大得多。由方程(11.7-10)式和(11.7-11)式的解所得的速度分布与实验数据相当吻合[+]，如图11.10所示，只是有两个部分要排除在外，一处是在很靠近板前缘的部分，此处边界层的近似假设不成立。另一处是在较远的下游处，此处流动变成了紊流。

与方程(11.7-9)、(11.7-10)式和(11.7-11)式的解相应的流动是层流。在离前缘足够远的下游处，流动成为紊流，勃拉修斯解不成立。当以边界层厚度计算的雷诺数

$$R=\frac{\bar{u}\delta}{\nu}$$

达到某个临界值时就出现层流向紊流的转折。通常临界转折雷诺数约为3000。确切的值还与表面粗糙度，物面曲率，马赫数等都有关系。

层流边界层与紊流附面层在热传导，表面摩擦，热量的产生等方面都有巨大差异。在宇航时代，对重返大气层的运载工具来说，层流—紊流转折问题具有极其重要的意义。当人造卫星重返大气

层时，在边界层中由表面摩擦所产生的热量是十分巨大的，而紊流边界层所产生的热量要比层流边界层产生的热量多得多。对绝大多数重返大气层的运载工具来说，如果头锥上的边界层是层流，它就可能幸存，但如果边界层流动是紊流，头锥将被烧毁。

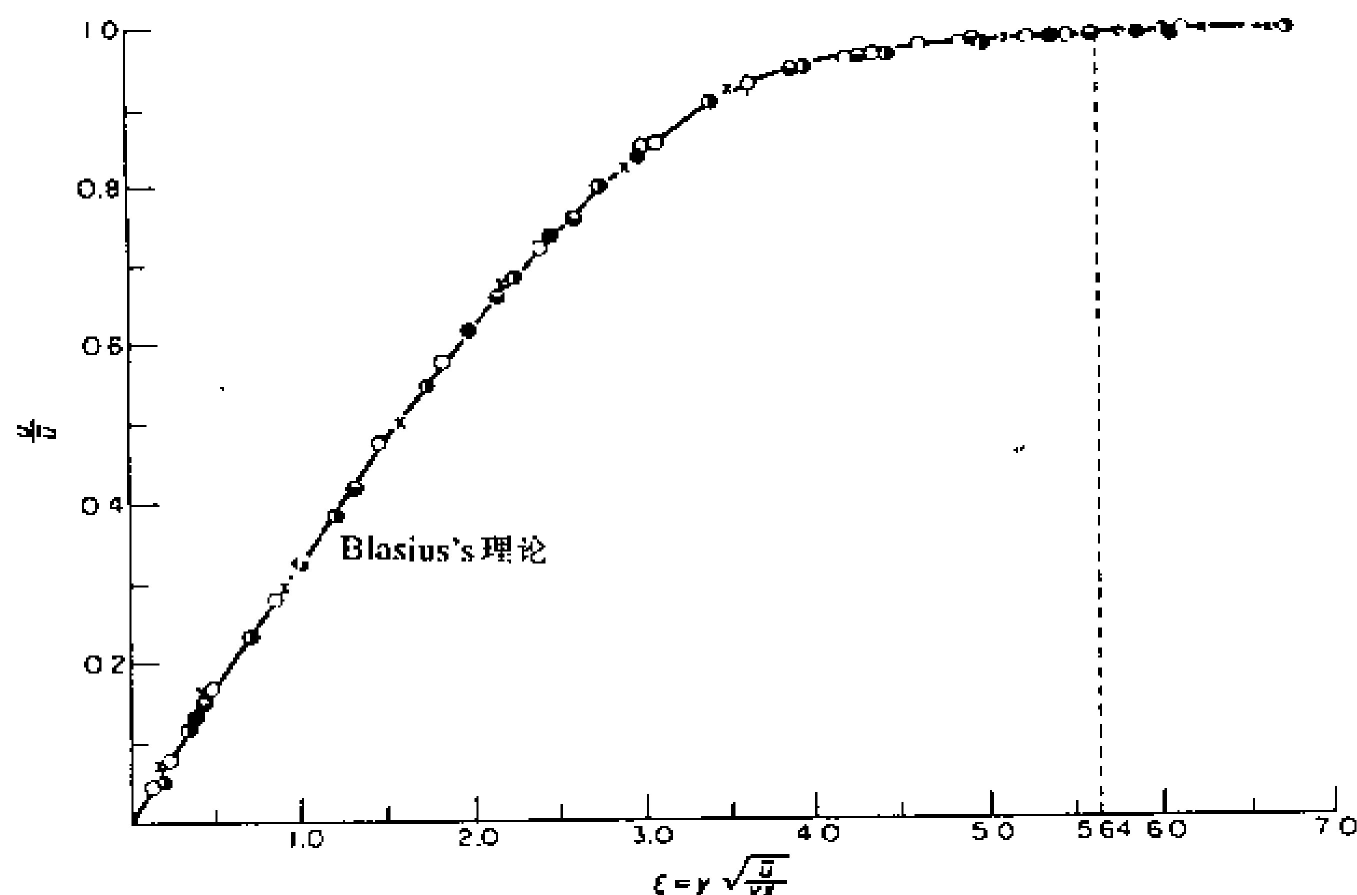


图 11.10　在零攻角下平板上层流边界层中速度分布的勃拉休斯解及与尼右拉斯实验的比较

11.8　无粘性流体

如果粘性系数正好为零，问题就可以大大地简化了。此时应力张量是各向同性的。

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} \tag{11.8-1}$$

运动方程可简化为

$$\rho \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{11.8-2}$$

式中 ρ 是流体密度，p 是压力，v_1, v_2, v_3 是速度分量，X_1, X_2, X_3 是单位质量的体力。

另外，如果流体是均匀和不可压缩的，那么它的密度是常数，连续性方程(10.4-4)简化成下式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad 或 \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \qquad (11.8\text{-}3)$$

满足方程(11.8-3)式的向量场称为管状向量场。根据一般位势理论，一管状向量场可以从另一个向量场导出。可以用二维流场的简单情况来说明这一点，对二维流场，$w=0$，同时，u, v 与 z 无关，其连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (11.8\text{-}4)$$

显然，只要取一个任意函数 $\psi(x, y)$，并根据下式

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v=\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (11.8\text{-}5)$$

导出 u 和 v，则方程(11.8-4)将恒得以满足。这样的函数 ψ 称为流函数。

将(11.8-5)式代入运动方程(11.8-2)式中，可得到基本方程(对二维流动)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}&=X-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}&=Y-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned} \qquad (11.8\text{-}6)$$

如果体力为零，并消去 p，得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi+\psi_y \nabla^2 \psi_x-\psi_x \nabla^2 \psi_y=0 \qquad (11.8\text{-}7)$$

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

下标表示偏微分。

11.9 旋度和环量

在流体力学中，旋度和环量的概念非常重要。环量$I(\varsigma)$定义为，在任何一个封闭回路ς中的线积分

$$I(\varsigma)=\int_{\varsigma}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{\varsigma}v_i dx_i \tag{11.9-1}$$

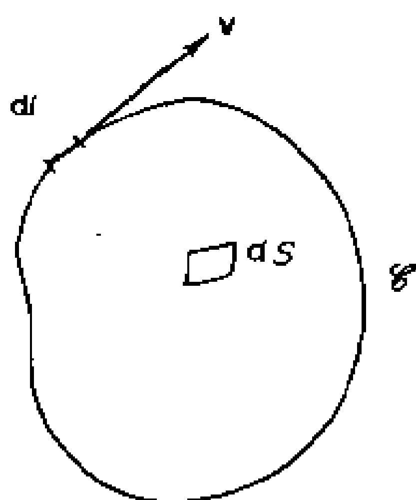


图 11.11 环量示意图

式中的ς为流体中的任一闭合曲线，被积函数是速度向量$\boldsymbol{v}$和向量$d\boldsymbol{l}$的点积，$d\boldsymbol{l}$与曲线ς相切，其长度为dl（图 11.11）。

显然，环量既是速度场的函数，又是所选择曲线ς的函数。

如果ς包围着一个单连域，则由斯托克斯定理能把线积分化为面积分

$$I(\varsigma)=\int_{s}(\nabla\times\boldsymbol{v})_n dS=\int_{s}(\text{curl}\boldsymbol{v})_i v_i dS \tag{11.9-2}$$

式中S为流体内由曲线ς所包围的任一表面，v_i是表面的单位法线，$\text{curl}\boldsymbol{v}=e_{ijk}v_{j,k}$，$\text{curl}\boldsymbol{v}$称为速度场的旋度。

如果回路ς是一条流线，即ς是由同一组流体质点随时间变化而组成的曲线，那么开尔文定理给出了环量随时间的变化规律。如果流体是无粘性的，同时体力是保守力，则

$$\frac{DI}{Dt}=-\int_{\varsigma}\frac{dp}{\rho} \tag{11.9-3}$$

如果除上述条件外，密度仅仅是压力的函数，则流体称为正压流体。由于积分是单值的并且ς是闭合曲线，故(11.9-3)式右边的积分项为零。由此得到赫姆霍兹定理：

$$DI/Dt=0 \tag{11.9-4}$$

为证明上述定理，注意到既然流体线ς总是由相同的质点所

组成，微分和积分的顺序可作如下交换：

$$\frac{D}{Dt}\int_c v_i dx_i = \int_c \frac{D}{Dt}(v_i dx_i) = \int_c \left(\frac{Dv_i}{Dt}dx_i + v_i \frac{Ddx_i}{Dt} \right)$$

(11.9-5)

但由于流体流动的结果，Ddx_i/Dt 是 dx_i 的增长率，因此它等于微元线段两端点处平行于 x_i 的两速度之差，即 dv_i。将 Dv_i/Dt 代入运动方程(11.8-2)式，并以 dv_i 代替 Ddx_i/dt，可得到

$$\frac{D_t}{Dt}\int_c \left[\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + X_i \right) dx_i + v_i dv_i \right]$$

$$= -\int_c \frac{dp}{\rho} + \int_c X_i dx_i + \int_c dv^2 \qquad (11.9\text{-}6)$$

由于在流场中 v^2 是单值的，所以上式右侧的最后一项为零。如果体力是保守力，则第二项也为零。因此，这就证明了开尔文定理。如果流体再是正压的，由于右侧所有项都为零，赫姆霍兹定理就直接成为开尔文定理的特殊情况。

在赫姆霍兹定理的明确结论中，包含有很重要的内容。如果只限于正压流，则有 $I=$常数。因此只要环量在某一瞬时为零，它就将永远为零。如果在某流场中任意选定的流体线上都如此的话，那么根据方程(11.9-2)式，在整个流场中旋度均等于零。这就导致了很大的简化，这就是将在下一节(11.10)节中讨论的无旋流的情况。只要注意到在流体力学中绝大多数经典著作都涉及到无旋流，就可以看出这一简化的重要性了。

应注意到，如果除了压力以外还有其他一些变量影响密度，则绕某个流体线的环量就不一定保持常数。地球物理中绝大多数问题属于这一范畴，其中温度既是影响 p 又是影响 ρ 的一个参数。并且在分层流动中，ρ 为位置的函数而不一定只是 p 的函数。

开尔文和赫姆霍兹定理中流体线一词的涵义可用薄翼型在空气中的运动来说明。由于赫姆霍兹定理的条件是满足的，因此绕任一流体线的环量 I 绝不随时间而变化。既然流体的运动是由翼型的运动所引起的，且一开始流体处于静止状态，即 $I=0$，于是得到在任何时候 I 都等于零。但应注意到由翼型所占据的体积内是没

有流体的。如图 11.12 所示，当翼型向前运动时，围绕着翼型边界的流体线 c 变长。根据赫姆霍兹定理，绕 c 的环量为零，这就使得 c 内部的总旋度为零。但不能得出在 c 内部任何地方的旋度都为零的结论。在被翼型所占据的区域内和翼型后面的尾流中，确实存在着旋度。然而，赫姆霍兹定理适用于翼型及其尾流以外的区域，同时，绕每个可能的流体线的环量等于零也清楚地表明，翼型及其尾流区以外的流动是无旋流。

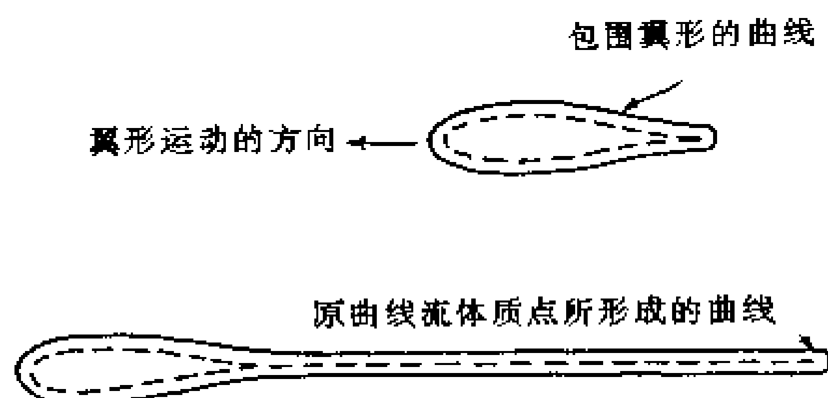


图 11.12　包围翼型及其尾流区的流体线

11.10　无旋流

如果流动的旋度处处为零，则称该流动为无旋流，即

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = 0, \qquad (11.10\text{-}1)$$

或　　$e_{ijk} v_{j,k} = 0$

对于二维无旋流，必有

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (11.10\text{-}2)$$

如果流体是不可压缩的，并引入(11.8-5)式所定义的流函数，将方程(11.8-5)式代入(11.10-2)式，就得出方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad (11.10\text{-}3)$$

这就是著名的拉普拉斯方程，很多应用数学的书籍都谈到它的解。

能够证明，即使是在三维的情况下，不可压缩流体无旋流动也

是受拉普拉斯方程支配的，因为根据无旋流的定义，以下三个方程恒得以满足

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{11.10-4}$$

这些方程能恒得以满足，如果速度 u,v,w，均由势函数 $\Phi(x,y,z)$ 按如下规则导出的话

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\qquad w=\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{11.10-5}$$

此外，如果流体是不可压缩的，则将方程(11.10-5)式代入(11.1-5)式，就可得到拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0 \tag{11.10-6}$$

由于 Φ 是势函数，故该方程也称为位势方程。

不可压缩的位势流动受拉普拉斯方程所支配。如果该方程能得到一满足所有边界条件的解，则由于欧拉运动方程给出了压力梯度，这个问题就解决了。造成流体力学主要因难的是非线性的迁移加速度，但它却并不妨碍不可压缩流体位势流的求解。这就是为什么位势理论是如此简单并又如此重要的原因。

为认识位势理论的用途，引用一下赫姆霍兹定理(见 11.9 节)：如果流体质量的任一部分的运动在某一瞬时是无旋的话，那么只要体力是保守力，同时流体又是正压的(即它的密度仅是压力的函数)，则其流动将永远是无旋的，这些条件在大多数问题里都是成立的。如果把一个固体浸入流体中，并突然使之运动，在无粘性流体中发生的该运动定是无旋的。因此，在很多技术上很重要的问题都是无旋的。

11.11 可压缩的无粘性流体

如果流体是可压缩的，则连续性方程(10.5-3)式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j}=0 \tag{11.11-1}$$

如果该流体是无粘性的，则欧拉运动方程为

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+X_i \tag{11.11-2}$$

如果温度已明确计及，则密度就只取决于压力。因此，如果已知温度是常数（等温），对于理想气体，有

$$p/\rho=\text{常数}, \qquad T=\text{常数} \tag{11.11-3}$$

但是，如果流动是等熵的（绝热且可逆），则有

$$p/\rho^{\gamma}=\text{常数}, \qquad T/\rho^{\gamma-1}=\text{常数} \tag{11.11-4}$$

式中 γ 是等压比热 C_p 和等容比热 C_v 之比，即：$\gamma=C_p/C_v$。上述两种情况都是正压的。

在其他情况下，必须将温度作为变量显式地引入，还必须引入联系着 p、ρ、T 的状态方程及联系着 C_p，C_v 和 T 的热状态方程。

小扰动情况

以一例子来说明，考虑无体力情况下，正压流中的小扰动传播，设

$$c^2=\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho \tag{11.11-5}$$

假设速度很小，以致其二阶项远小于一阶项，从而可以忽略。相应地，密度 ρ，压力 p 本身的扰动量及它们导数的扰动量也是一阶无穷小量。这样，在略去体力 X_i 及二阶以上的无穷小量以后，方程(11.11-1)和(11.11-2)可线性化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0 \tag{11.11-6}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}=\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \tag{11.11-7}$$

将方程(11.11-6)式对 t 微分，并把方程(11.11-7)式对 x_i 微分，再略去二阶以上各项并消去和式 $\rho\frac{\partial^2 v_i}{\partial t\partial x_j}$，可得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i\partial x_i} \tag{11.11-8}$$

即

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$$

这就是小扰动传播的波动方程，它是声学的基本方程。

用同样的线性化过程，并由于压力变化和密度变化成正比，$\mathrm{d}p = c^2 \mathrm{d}\rho$，可看到同一波动方程支配着压力扰动量。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} \tag{11.11-9}$$

再者，从方程(11.11-7)式和(11.11-8)式或(14.11-9)，可推出

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{11.11-10}$$

因此，在线性理论中，ρ, p, v_1, v_2, v_3 受同一波动方程所支配。

声音的传播

现在将这些方程应用于(声音)扰动源问题，该扰动源位于原点，并对称地向所有方向辐射。可以将它想象成一个球形汽笛。由于辐射对称，故有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{11.11-11}$$

因此方程(11.11-8)式成为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} \tag{11.11-12}$$

通过直接代入可证明此方程的一个通解是两个任意函数 f 与 g 之和。

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{r} f(r - ct) + \frac{1}{r} g(r + ct) \tag{11.11-13}$$

式中 ρ_0 为一常数(场的未扰动密度)。f 项代表从原点向外辐射的波，g 项代表向原点会聚的波。也许用一特殊情况可以很清楚地说明该问题。取函数 $f(r-ct)$ 为一阶跃函数：$f(r-ct) = \epsilon 1(r-ct)$，式中 ϵ 为小量，$1(r-ct)$ 为单位阶跃函数，当 $r-ct<0$ 时它为零，

当 $r-cr>0$ 时，它为 1，因此，扰动是 $r-ct=0$ 所描述的不连续线上的一个小阶跃。在 $t=0$ 时，扰动位于原点。在 t 时刻，不连续线移到 $r=ct$ 处。所以，c 是扰动的传播速度，普遍的情况可通过叠加原理得到。在声学中，c 称为声速。

声速 $c=(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)^{1/2}$取决于压力与密度之间的关系。对于理想气体，等熵条件下，由方程(11.11-4)有

$$c=\sqrt{\gamma p/\rho} \tag{11.11-14}$$

在力学史上，关于声音在空气中传播有一段很长的故事。第一个对声速进行理论研究的是牛顿(1642—1727)，他假定(11.11-3)式成立并在 1687 年的一个刊物上发表，认为 $c=\sqrt{p/\rho}$为声速。人们发现，牛顿公式计算出的声速比实验得出的声速低六分之一左右。该差别直到拉普拉斯(1749—1827)进行分析后才得以解释，拉普拉斯指出，在声波中压缩和膨胀的速度极快，以致没有时间通过传导进行可观的热交换。因此，它一定是绝热过程。如果回忆一下前面所述的阶跃波，这个论证显然是合理的。对一阶跃波来说，在波阵面扫过时，该处的 ρ 和 p 所发生的阶跃变化应在波阵面无限小的空间和时间内完成。在如此小的时间间隔内热传递可以忽略。因此气体是等熵地越过不连续面。由于普通的声波就是由这样一些阶跃波所叠加而成，故整个流动也是等熵的。因此，方程(11.11-4)式适用，并能得到(11.11-14)式的结果。实验证明拉普拉斯的分析是正确的。

因此，一般说来波动方程(11.11-8)式及后面诸方程与等熵流有关。这些方程的应用必须注意保证等熵条件。例如，不能有很强的滤波且热扩散应为一小量。

11.12　亚音速流与超音速流

实验室参考系下的基本方程

基本波动方程(11.11-8)式的参考坐标系相对于无穷远处的

流体是静止的。该方程对何处产生扰动及如何产生扰动未加任何限制。扰动源可以是运动的，也可以是随时间而变化的，这些方程均有效。扰动源的性质仅仅出现在边界条件和初始条件中。

在静止的空气中，一飞行着的飞行器是一个扰动源。扰动以声波的形式传出，声波传播遵守波动方程。众所周知，当飞行器的速度由亚音速变为超音速时，扰动的性质发生了剧烈的变化。超音速情况下，发生所谓的声爆。

在风洞中研究飞行器周围的流动性质比较方便。因此可以写出对于站在地面上的人来说当风洞中流动空气受扰动时的波传播方程。

考虑一团流体，譬如说从左边无穷远处以匀速 U 流来，如果用一撇表示扰动，设速度分量为

$$u = U + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad U = \text{常数} \tag{11.12-1}$$

压力和密度为

$$p = p_0 + p', \qquad \rho = \rho_0 + \rho' \tag{11.12-2}$$

如果能假定扰动是一阶无穷小量，就能使整个研究简化；即

$$u', v', w' << U, \; p' << p_0, \; \rho' << \rho_0 \tag{11.12-3}$$

在这些假设下，基本方程(11.11-1)式和(11.11-4)式可以像前述一样线性化。事实上，用这些新的假设。重复 11.11 节中的那些步骤，可得如下连续性方程

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right)$$

$$+ (U + u')\frac{\partial \rho'}{\partial x} + v'\frac{\partial \rho'}{\partial y} + w'\frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0,$$

上式线性化为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) + U\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \tag{11.12-4}$$

类似地，把运动方程线性化为

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+U\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+U\frac{\partial w'}{\partial x}=-\frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial z} \tag{11.12-5}$$

把上述三个方程分别对 x,y,z 求导，相加，再略去二阶项，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)+U\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{c^2}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho'}{\partial z^2}\right)$$

因此，用方程(11.12-4)式消去$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}$后，可得

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}+2U\frac{\partial^2\rho'}{\partial x\partial t}+U^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho'}{\partial z^2}\right) \tag{11.12-6}$$

该方程就是空气动力学中可压缩流体的基本方程。

如果对方程(11.12-6)式使用在 11.11 节中从方程(11.11-8)式导出(11.11-9)式和(11.11-10)式的方法，就可得出压力 p'和速度分量 v'满足同样的方程。如果流动是无旋流，则速度势 Φ，对 $v'_i=\Phi_{,i}$ 也满足这个方程。

定常流动

让我们从更简单的情况来验证基本方程(11.12-6)式。考虑绕一个静止模型的**定常流动**。则所有对时间 t 的导数项均为零，速度势 Φ 遵循下述方程：

$$\frac{U^2}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{11.12-7}$$

该方程只和一个无因次参数 U/c 有关，该参数称为马赫数，记为

$$M=\frac{U}{c} \tag{11.12-8}$$

方程(11.12-7)式的解的性质依赖于 M 是大于 1 还是小于 1。如果 $M<1$，流动称为亚音速流，如果 $M>1$，则称为超音速流，对于亚音速流，有

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \quad (M<1) \tag{11.12-9}$$

而对于超音速流，有

$$(M^2-1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \quad (M>1) \tag{11.12-10}$$

方程(11.12-9)式是椭圆型偏微分方程，方程(11.12-10)式是双曲型偏微分方程。下面的例子将说明这两种方程之间的差别。

例子　波纹板上的定常流动

将一很薄的有小正弦波纹外形的板放入定常流动中，使板的平均弦线平行于无穷远处的流速 U。见图 11.13 和图 11.14。描述板上波纹的方程是：

$$z=a\sin\frac{\pi x}{L} \tag{11.12-11}$$

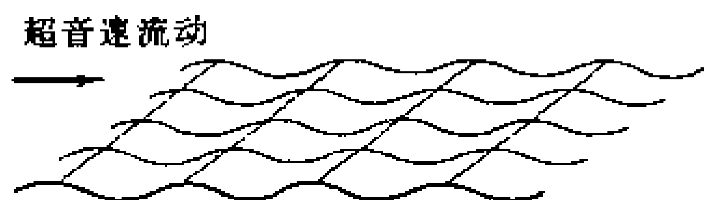


图 11.13　在定常超音速流中的波纹板

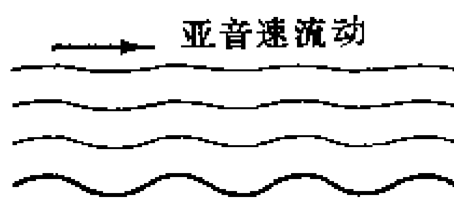


图 11.14　在定常亚音速流中的波纹板

假定波幅 a 远小于波长 L.

$$a \ll L \tag{11.12-12}$$

因为流体被假设为理想流体，故它能在板上滑动但不能渗入板内。因而，流动的速度向量必须与板相切，有 x、y、z 方向的速度分量为

$$U+u',v',w' \tag{11.12-13}$$

另一方面，由(11.12-11)式描述的表面的法线向量具有如下分量(见图 11.15)

$$-\frac{\partial z}{\partial x},\qquad -\frac{\partial z}{\partial y},\qquad 1。\tag{11.12-14}$$

如果速度向量的各分量由(11.12-13)式给出，且与板的表面相切，则它必定垂直于由方程(11.12-14)式所给出的法向量。因此，无渗透条件可用向量(11.12-13)式与(11.12-14)式的正交关系来表达，即用它们的点积为零的条件来表示：

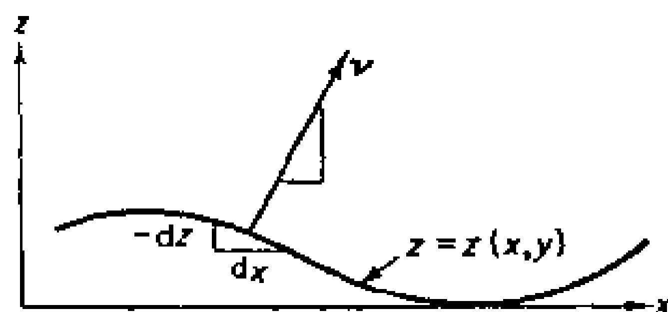


图 11.15 表面法线和速度边界条件

$$-(U+u')\frac{\partial z}{\partial x}-v'\frac{\partial z}{\partial y}+w'\cdot 1=0$$

略去高阶项，可得板上的边界条件为

$$w'=U\frac{\partial z}{\partial x}\tag{11.12-15}$$

由(11.12-11)式，上式变为

$$w'=U\frac{a\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\quad (当\ z=a\sin\frac{\pi x}{L}时)\tag{11.12-16}$$

另外，考虑到函数 $w'(x,y,z)$ 的连续性和可微性，可写出

$$w'(x,y,z)=w'(x,y,0)+z\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_{z=0}+\cdots\tag{11.12-17}$$

当 z 值很小时，第一项以后的各项均为高阶项，将它们全部略去，可得简化的边界条件

$$w'=U\frac{a\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\quad (当\ z=0\ 时)\tag{11.12-18}$$

无限远处的条件

不论是超音速流还是亚音速流，由方程(11.12-18)式给出的边界条件并不能完全确定方程(11.12-9)式或(11.12-10)式的解。

还必须确定流体在无限远处的条件。对可以确定的适当型式的边界条件而言，椭圆型方程和双曲型方程之间有很大的差别，需要详加考虑。

亚音速情况

对于椭圆方程(11.12-9)式，扰动的影响是向各个方向散布开的，可以合理地假定：任何一有限物体所产生的扰动在离该物体无穷远处的影响为零。这一点可以从输入流体内的总能量作出严格的论证，如果流体速度存在一定的分布形式，且此流速在离物体无限远时，并不以某个衰减率趋于零，那么为产生这样的运动，就必须把无穷大的能量输入流体，而这是不可能的事(有关更详细的情况，读者可参考偏微分方程或空气动力学教科书)。因此，对讨论的该问题要加上如下条件：

(a)流动是二维的，且平行于 xz 平面，并与坐标 y 无关。

(b)当 $z\to\pm\infty$时，所有的扰动都趋于零。具体地说，就是

$$\text{当 } z\to\pm\infty\text{时}, u', v', w'\to 0, \text{即 } \Phi\to\text{常数} \qquad (11.12\text{-}19)$$

超音速情况

现在来看双曲型方程(11.12-10)式。可以发现，扰动能随着有限尺寸的波传到很远处。振幅衰减的理由并不适用。相反，必须用辐射条件来代替边界条件，该条件为：板是仅有的扰动源，且扰动是从扰动源向外辐射而不是向内辐射。

在只涉及单个扰动源时，该辐射条件很容易描述。例如，方程(11.11-13)式右侧的两个解，$f(r-ct)/r$ 项表示一个从原点辐射的波；因此，对位于原点处的源，在辐射条件下该项是唯一允许的项。如果将其用于二维定常流动，该条件就多少有点混淆了。也许看了风洞中绕静止模型的超音速流的一些照片就能对该问题更为清楚，见图 11.6，照片中的流动是由左向右的。从图片中可见扰动线向右倾斜。这些扰动线是由纹影图象所显示的流体等密度线。强(激)波和弱(马赫)波的倾斜方向由辐射条件确定。

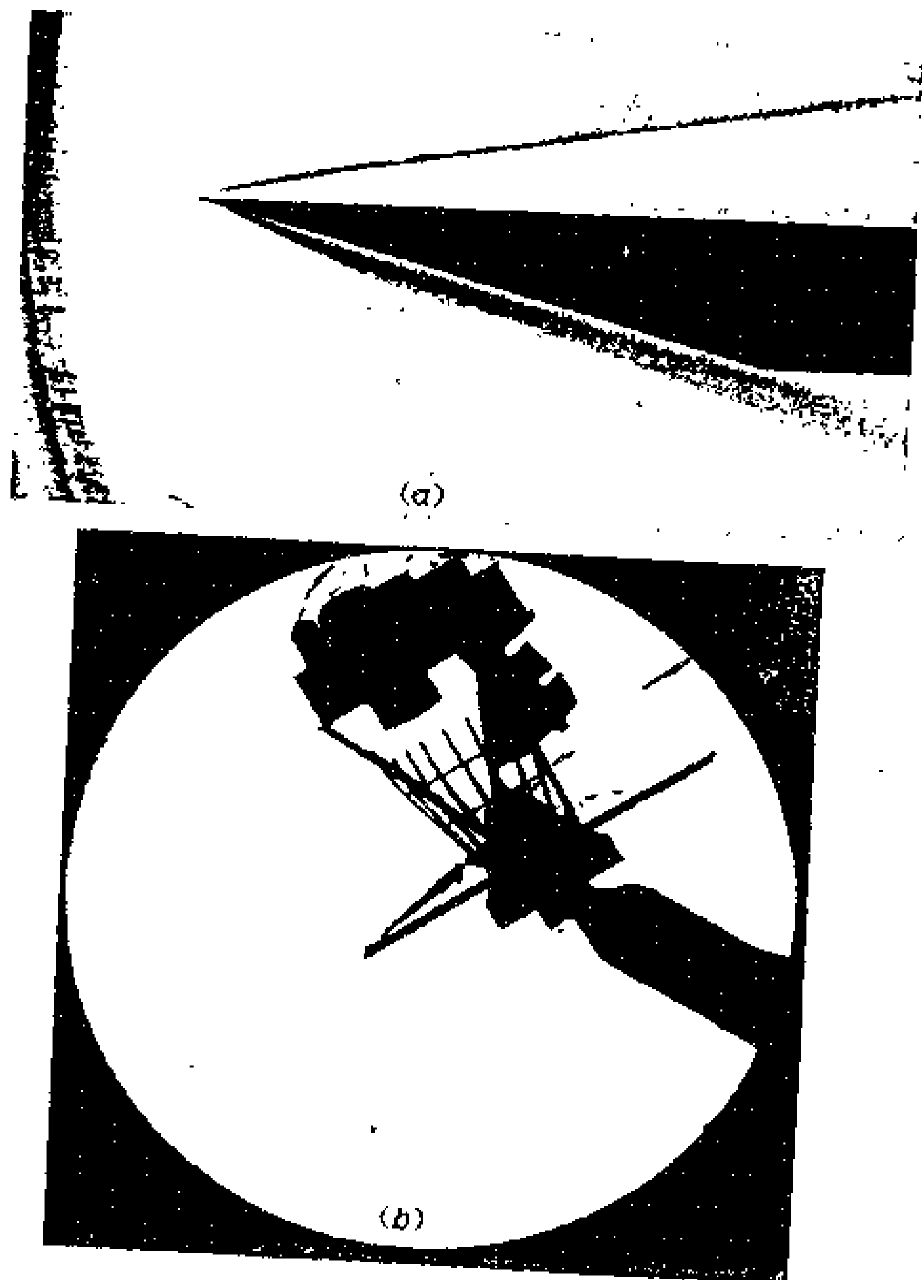


图 11.16

(a)流经一平面的流动，该板具有尖锐的斜削前缘，其上表面与马赫数为 8 的自由束流一致。在板的上侧，由亮线显示出层流边界层。由边界层的位移效应产生了激波。在下侧也可看到类似的特性。纹影仪照片，流动由左向右。经加尼福尼亚理工学院 Toshi Kubota 同意转载。 (b)在 50 英寸高超音速风洞中，Nimbus 宇宙飞船的简缩模型。马赫数为 8，雷诺数为 $0.42\times10^6/\text{ft}$。纹影仪照片，流动由左到右，经 ARO 有限公司 Von Karman 气动力学实验室同意转载

波墙问题的解

现在回到我们的问题上来。在亚音速情况下，很容易证明通过直接代入来证明方程(11.12-9)式可由下列形式的函数所满足

$$\Phi = Ae^{\mu z}\cos\frac{\pi x}{L} \tag{11.12-20}$$

将方程(11.12-20)式代入方程(11.12-9)式,可得

$$-(1-M^2)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 Ae^{\mu z}\cos\frac{\pi x}{L} + A\mu^2 e^{\mu z}\cos\frac{\pi x}{L} = 0$$

或

$$\mu = \pm\left|\frac{\pi}{L}\right|\sqrt{1-M^2} \tag{11.12-21}$$

如果方程(11.12-21)式中取正号,那么随 $z\to\infty$,方程(11.12-20)式的函数 Φ 将按指数规律无限地增加。另一方面,如果取负号,则能满足条件(11.12-19)式,因此,可以试取

$$\Phi = Ae^{-(\pi/L)\sqrt{1-M^2}z}\cos\frac{\pi x}{L} \tag{11.12-22}$$

由 Φ 算出竖向速度 w' 为

$$w' = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\pi}{L}\sqrt{1-M^2}Ae^{-(\pi/L)\sqrt{1-M^2}z}\cos\frac{\pi x}{L} \tag{11.12-23}$$

使上式中的 $z=0$,并由边界条件(11.12-18)式,可得

$$A = -\frac{Ua}{\sqrt{1-M^2}} \tag{11.12-24}$$

现在所有亚音速的边界条件都已满足,因此,亚音速的解为

$$\Phi = -\frac{Ua}{\sqrt{1-M^2}}e^{-(\pi/L)\sqrt{1-M^2}z}\cos\frac{\pi x}{L} \tag{11.12-25}$$

可见,随着 z 的增加上式所代表的扰动按指数规律衰减。从这个解中还可推出速度场,压力场及密度场。特别是由

$$U\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x'} \tag{11.12-26}$$

可得到

$$p' = -\rho Uu' = -\rho U\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{11.12-27}$$

该流动的流线画在图 11.14 中。

现在转到超音速流方程(11.12-10)式的情况,该方程能被下

列函数所满足

$$\Phi = f(x - \sqrt{M^2 - 1}z) + g(x + \sqrt{M^2 - 1}z)$$

(11.12-28)

式中 f 和 g 为任意函数，因为如果设

$$\xi = x - \sqrt{M^2 - 1}z \tag{11.12-29}$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\sqrt{M^2 - 1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi},$$

由此

$$(M^2 - 1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (M^2 - 1)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} - (M^2 - 1)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} = 0$$

及方程(11.12-10)式可得以满足。由下式所确定的诸线是马赫波，

$$\xi = 常数，即\ x - \sqrt{M^2 - 1}z = 常数 \tag{11.12-30}$$

扰动沿马赫波传播并不降低强度。这些线的倾斜方向和风洞照片中所示的方向相同。另一方面，函数 $g(x + \sqrt{M^2 - 1}z)$ 的马赫线倾斜方向是错误的，因此，根据辐射条件必须舍去函数 g。从而，可以试取

$$\Phi = f(x - \sqrt{M^2 - 1}z) \tag{11.12-31}$$

从方程(11.12-31)式中，可得

$$w' = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\sqrt{M^2 - 1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \tag{11.12-32}$$

将方程(11.12-32)式与边界条件(11.12-29)式作比较，当 $z=0$ 时，可得

$$-\sqrt{M^2 - 1}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right)_{z=0} = \frac{Ua\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L} = \frac{U_a\pi}{L}\cos\frac{\pi\xi}{L}\bigg|_{z=0}$$

(11.12-33)

因此，积分上式并回到方程(11.12-29)式，有

$$\Phi = f = -\frac{Ua}{\sqrt{M^2 - 1}}\sin\frac{\pi}{L}(x - \sqrt{M^2 - 1}z)$$

(11.12-34)

这就是该问题的解,流线图绘在图 11.13 中。

这两种情况的差别非常大,在亚音速的情况下,压力扰动随着离开平板距离的增加而减小。而在超声速扰动中则不是这样。当然,这就是为什么音爆从超音速飞机上以它的全部力量向我们冲来,而亚音速飞机则没有这种情况。

11.13 在生物学中的应用

流体力学与活的生物的关系非常密切,就象它与机械和物理的物体的关系一样。象气体在气道及肺部的流动,尿道中的流动及树液在树的木质部的流动,都可看作满足纳维—斯托克斯方程及无滑动边界条件的牛顿流体。血液是非牛顿流体,如果剪切率足够高($>100s^{-1}$),血液的粘度几乎为常数,即它的行为几乎与牛顿流体一样。唾液、粘液、膝关节内的关节液及其他的体液也是非牛顿流体。分析它们的流动必须考虑它们的非牛顿性。

仅当血液在管径比红细胞直径大得多的血管内流动时,血液才能当作均质流体处理。象在与红细胞直径几乎相等直径的毛细血管中流动一样,小血管内的血液流动必须将细胞处理成单个物体,此时的血液流动是两相流问题。另外的包含蛋白质和其他悬浮物的生物体液也可能被处理成两相或多项流,条件是如果这些体液是在尺寸足够小的管道中流动的话。

研究生活在空中,水中和陆地上的动物和植物的运动需要流体力学。研究动物和植物体内的体液循环运动也需要流体力学。一般来说,后一种情况下边界条件是非定常的。

本章讨论过的几个例子在生物学中都有应用。在槽和管内的流动分析与血液的流动问题有密切关系。然而血管是弹性体,血管的直径随压力不同而变化。这种流动和壁面弹性变形的相互作用常产生一些非常有趣的现象。在生物学中,流体力学与固体力学常常是紧密联系在一起的。

从在本章最后列出的参考文献中,读者会对生物力学极为广

泛的问题留下深刻印象。

习 题 11

11.1 如果没有足够的刚度，大烟囱就会在风中摇摆。风力与流动的雷诺数有关，设风速为 30 英里/小时（每英里/小时＝0.44704m/s），烟囱直径为 20 英尺（每英尺＝0.3048m），计算流动的雷诺数。

答案：5.46×10^6

空气 20℃ 时的粘性系数 $\mu=1.808\times10^{-4}$ 泊（g/cm・s）运动粘度为 0.150 沱（cm^2/s）。

11.2 计算直径为 16 英寸的潜水艇的潜望镜在速度 15 节的雷诺数。

答案：2.4×10^6

水在 10℃ 时 $\mu=1.308\times10^{-2}$g/cm・s，$\nu=1.308\times10^{-2}cm^2/s$。1 节＝1 海里每小时，或 1.852km/hr。

11.3 假设在用来确定电子电荷的云雾室实验中（罗伯特・盖革实验）。水滴直径为 5μm（5×10^{-4}cm），水滴在 0℃ 的空气中运动，速度为 2mm/s，试问雷诺数是多少？

答案：7.6×10^{-4}

空气 0℃ 时，$\nu=0.132cm^2/s$。

11.4 血浆在直径为 10μm（即 10^{-3}cm）的微血管中以 2mm/s 的速度流动，试问雷诺数是多少？

答案：1.4×10^{-2}

体温下的血浆，μ 约为 1.4 厘泊（1.4×10^{-2}g/cm・s）。

11.5 弦长为 10 英尺的大机翼以 600 英里/小时（268.224m/s）的速度在 7500 英尺（2286m）的高度上（0℃）飞行，计算其雷诺数。

答案：6.2×10^7。

11.6 根据方程（11.5－15）给出的基本解，证明通过管道的质量流率为：

$$Q=\frac{\pi a^4\rho}{8\mu}\alpha \qquad (11.5\text{-}16)$$

平均速度为

$$u_m=\frac{a^2}{8\mu}\alpha \qquad (11.5\text{-}17)$$

表面摩擦系数为

$$c_f = \frac{\text{剪切力}}{\text{平均动压力}} = \frac{-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a}}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} = \frac{16}{R_N} \qquad (11.5\text{-}18)$$

式中 $R_N = 2au_m/\nu$。

11.7 空气以 100ft/s(30.48m/s)的速度流过 10 英尺(3.048m)长的板时,试估计边界层的厚度

答案:在 20℃ 时,$\delta = 0(4.018\times10^{-4})$弦长为 3.048m 时,边界层厚度≈0.12cm。

11.8 证明对一不可压缩粘性流体的二维流动来说,由(11.8-5)所定义的流函数的基本方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + \psi_y\nabla^2\psi_x - \psi_x\nabla^2\psi_y = \nu\nabla^2\nabla^2\psi + \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad (11.8\text{-}8)$$

11.9 推导不可压缩流体在极柱坐标系下的纳维—斯托克斯方程。

解:纳维—斯托克斯方程的左侧表示加速度,在极柱坐标中的分量为 a_r、a_θ、a_z,参见方程(10.9-9)式。右侧为应力张量的向量散度,在极柱坐标中,分量由方程(10.9-11)式给出。应力仍沿用径向,周向和轴向表示。前面已用 u_r, u_θ, u_z 等项表达了 $e_{rr}, e_{\theta\theta}$ 等。应变率 $\dot{e}_{rr}, \dot{e}_{\theta\theta}$ 等与速度 u, v, w 之间的关系相同,因此

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \text{等}$$

因此,对于不可压缩流体,从方程(7.3-6)式得到

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu e_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu e_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right),$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu e_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta} = \mu\left(r\frac{\partial(v/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right),$$

$$\sigma_{\theta z} = 2\mu e_{\theta z} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{zr} = 2\mu e_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right).$$

代入方程(10.9-11),得到纳维—斯托克斯方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + F_r$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2}\right) + F_\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w + F_z$$

此处：

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

连续性方程为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

11.10 血液是非牛顿流体，它的粘性随应变率而变化，参见图 9.19 及习题 9.3。导出类似于纳维—斯托克斯方程形式的血液运动方程。用数学公式表示活体心脏内血液流动问题。

11.11 如果空气真是无粘性的，飞机能够飞吗？鸟和昆虫能飞吗？为什么？

11.12 如果水是无粘性的，鱼能游吗？鱼在水中与鸟在空气中运动的道理有何不同？

11.13 用公式表示在月球影响下地球上的潮汐现象？（参阅 Lamb，Hydrodynamics，PP. 358—362）

11.14 在矩形横剖面长水槽内的水中产生了波，用什么方程能够确定波长和频率。

11.15 在一个深水池中，水的表面产生了波纹。波速与波长有关吗？虽然全部求解十分复杂，但是在写出所有基本方程后，这些波是否分散（即速度是否与波长有关）就能判定。把水池的自由面取为 xy 平面，z 轴向下，试以下列速度分量去检验一下它的二维解。

$v \equiv 0$，　$u = ae^{-kz}\sin kx\sin\omega t$，和 $w = -ae^{-kz}\cos kx\sin\omega t$

11.16 考察一个地面效应机械，它采用一个或多个反作用喷气发动机，并悬停在地面上空。画出它停悬时流动的流线草图，并写出它的基本方程和边界条件。

11.17 分析夏季雷雨中积云的运动，与此有关的变量有哪些？如果温度是一

个要着重考虑的因素。它如何反映在基本方程中？重力不能忽略，写出基本方程，用量纲分析来确定基本无量纲参数。

11.18 水浪冲上有斜坡的海滩，在海滨上出现如下现象：拍岸的浪花，汹涌的巨潮，水波，涟漪和泡沫。用数学方法分析这些现象。恰当地选择各个变量，写出微分方程和边界条件。作出你认为合理的简化假设，并清楚地叙述这些假设。

11.19 在海滩上有一种巨澜回流，它是一些运动得很快的狭窄水流，并沿着垂直于海岸线的方向流入海洋。这对于游泳者来说是很危险的，这是一种反常的现象。对于一个二维倾斜的海滩和一个二维的水波，得出的却是三维的解，这种情况会有什么基本的矛盾吗？（从数学的观点而不是从游泳者的观点来看）你能举出自然界中这类现象的其他例子吗？

11.20 当风垂直地吹过长直的圆柱形管时，在尾流中有许多漩涡，这些漩涡使管子产生振动。据报道，曾有一条穿越阿拉伯的输油管（地面以上部分）由于风而产生剧烈振动。烟囱、大的火箭等均遭受这种扰动。经过长的圆柱而产生的漩涡是三维的，换句话说，即使风和圆柱都是均匀的，而沿着圆柱长度方向产生的漩涡也是不均匀的。试用公式把一个固定的刚性圆柱的空气动力学问题表示出来。写出所有的微分方程和边界条件，进行量纲分析以确定所包含的全部无量纲参数。

11.21 把上述问题加以推广，研究经过一挠性的振动的圆柱而产生的漩涡。

11.22 用习题 11.9 中导出的方程来求柯依特流量计（图 3.22）中的速度场。

答案：$r=a$ 处 $v=\omega_1 a$，$r=b$ 处 $v=\omega_2 b$，则

$$v=(a^2-b^2)^{-1}\left[(\omega_1 a^2-\omega_2 b^2)r-a^2b^2(\omega_2-\omega_1)/r\right]$$

11.23 用纳维—斯托克斯方程求矩形横剖面长直管中的流动速度分布。

12 弹性力学的一些简单问题

基本方程式，弹性波，轴的扭转，梁的弯曲和有关生物力学的一些问题。

12.1 均匀各向同性体的弹性力学基本方程

在上一章里，我们已经讨论了流体流动的基本方程。在这一章中，我们将研究服从虎克定律的固体的运动。这种固体叫做虎克体。一个虎克体有一个零应力状态。所有的应变和质点的位移都是以零应力状态为基准量度，在零应力状态下，应变和质点的位移为零。

从前面各章中，我们得到如下的基本方程组。用 $u_i(x_1,x_2,x_3,t)$，$i=1,2,3$，来描述一个在时间为 t 瞬间，位于 x_1,x_2,x_3 位置处质点偏离其与零应力状态时位置的位移。对于这个位移场，可以定义各种应变度量。根据方程式(5.3-3)，如用 $u_i(x_1,x_2,x_3,t)$来表示时，即为 Green 应变张量

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right]. \tag{12.1-1}$$

式中以及下文的所有拉丁字母指数的取值范围皆为 1，2，3。该质点的速度 v_i 可由位移的物质导数给出：

$$v_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{12.1-2}$$

该质点的加速度 a_i 可由速度的物质导数给出。根据方程(10.3-7)即得

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{12.1-3}$$

质量守恒由连续方程(10.5-3)来表示：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{12.1-4}$$

动量守恒用欧拉运动方程(10.6-7)来表示：

$$\rho a_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \tag{12.1-5}$$

均匀而各向同性材料的虎克定律是

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij} \tag{12.1-6}$$

式中 λ 和 G 是拉梅(Lame')常数。

方程(12.1-1)到(12.1-6)描述了一个弹性体的理论结构。如果把这些方程和 11.1 节中相应的粘性流体方程进行比较，我们可以看出：除了非线性应变—位移梯度关系(12.1-1)不同于流体的变形速率—速度梯度的线性比例关系(6.1-3)外，其它的方程式都相似。因此，弹性体的理论比粘性流体的理论有更深刻的非线性性。

非线性的数学问题，通常复杂难解。为了简化理论，通常引入一个严格的限制：即限定位移和速度为无限小。在这个限制下，方程(12.1-1)到(12.1-3)即可线性化。人们尽可能先掌握好线性理论然后再来揭示非线性所带来的特色。

在 u_i 和 v_i 极小的情况下，我们可把方程(12.1-1)到(12.1-3)中的非线性项忽略，得到如下线性化的方程：

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{12.1-7}$$

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \tag{12.1-8}$$

从方程(12.1-4)到(12.1-8)总共有 22 个方程。其中有 22 个未知量 $\rho, u_i, v_i, a_i, e_{ij}, \sigma_{ij}$。把方程(12.1-6)代入方程(12.1-5)，可消

去 σ_{ij},同时利用方程(12.1-7)就可得到著名的纳维尔(Navier's)方程：

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x_i} + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \qquad (12.1\text{-}9)$$

式中 e 是位移向量 u 的散度，

$$e = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad (12.1\text{-}10)$$

∇^2 是拉普拉斯(Laplace)算子。如果用 x, y, z 代替 x_1, x_2, x_3,则

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (12.1\text{-}11)$$

如果引入用(7.4-8)定义的泊松比 ν,就可将纳维尔方程(12.1-9)改写成

$$G\left(\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial X_i}\right) + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \qquad (12.1\text{-}12)$$

这就是线弹性理论的基本场方程。

纳维尔方程(12.1-9)必须针对适当的边界条件来求解。这些边界条件通常是下面两种类型中的一种：

(1)指定位移。边界上的位移分量 u_i 是指定的。

(2)指定表面力。在边界上给定表面力的分量 $\overset{\nu}{T}_i$。

在大多数弹性力学问题中,一个物体的某一部分边界上给出的是位移边界条件,而另一部分边界上给出的是力的边界条件。在后一种情况下,可以用虎克定律把边界条件化为由 u_i 的一阶导数组合而成的给定值。则全部边界条件可由位移及其导数来表示。

12.2 平面弹性波

线性方程的应用,可用弹性介质中简谐波系列来示范。假定位移分量 u_1, u_2, u_3(或写为 u, v, w)为无限小,同时体力 X_i 为零。则用代入法即可证明纳维尔方程(12.1-9)的一个解是

$$u = A\sin\frac{2\pi}{l}(x \pm C_L t), v = w = 0 \qquad (12.2\text{-}1)$$

式中 A, l, C_L 是常数，常数 C_L 应选为

$$C_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}. \quad (12.2\text{-}2)$$

当 $x \pm C_L t$ 保持为一常数时，方程(12.2-1)所表示的运动形式即不改变。如取负号，则随着时间 t 的增加，波形将以速度 C_L 向右方运动。所以常数 C_L 可称为波动的相速度。在任一瞬间，位移 u 是 x 的函数，是正弦状的波动。可见，方程(12.2-1)中的常数 l 是波长。由方程(12.2-1)所算出的质点速度方向和波的传播方向(即 x 轴的方向)相同。这样一个波动称为纵波。由于在任一瞬时，波峰位于平行的平面内，所以方程(12.2-1)所代表的运动就称为平面波系列。

其次让我们研究由下式所代表的运动

$$u = 0, \quad v = A\sin\frac{2\pi}{l}(x \pm ct), \quad w = 0 \quad (12.2\text{-}3)$$

它的相速度为 c，波长为 l。它是在 x 轴方向传播的平面波系列。把方程(12.2-3)代入到方程(12.1-9)中，就可以看到 c 必须取值为 C_T：

$$C_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (12.2\text{-}4)$$

由方程(12.2-3)算得的质点速度(在 y 方向)是垂直于波的传播方向(x 方向)的。因此，这种波叫做横波。速度 C_L 和 C_T 分别叫做纵波速度和横波速度。它们与材料的弹性常数和密度有关。比值 C_T/C_L 则仅和泊松比有关：

$$C_T = C_L\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}. \quad (12.2\text{-}5)$$

如果 $\nu=0.25$，则 $C_L=\sqrt{3}\,C_T$.

与方程(12.2-3)类似，下面的式子代表质点在 z 方向运动的横波。

$$u = 0, v = 0, w = A\sin\frac{2\pi}{l}(x \pm C_T t). \quad (12.2\text{-}6)$$

与质点运动相平行的平面[如方程(12.2-3)的 xy 平面或方程(12.2-6)的 xz 平面]称为偏振面。

平面波仅能存在于无界的弹性连续介质内。在一个有限的物体中，当平面波碰到边界时，它将被反射回来。如果在边界外有另一个弹性介质存在，在第二个介质中就会出现折射波。这种反射与折射的性质和声学、光学出现的反射与折射类似，与它们的主要区别在于：在弹性力学中的一个入射纵波，将以纵波和横波的组合形式来反射与折射，一个入射的横波也将以两类波形的组合来反射与折射。适当地组合这些波以满足边界条件，即可得到详细的结果。

12.3 简　化

在下列情况下，线性化后的弹性理论可大大地简化：

(1)物质具有均匀性和各向同性；

(2)没有惯性力；

(3)物体有高度的几何对称性；

(4)应力和应变是平面性的；

(5)薄壁结构—板和壳。

显然，如能减少独立变量的数目，就能将方程简化。如果问题不随时间变化，就可以删掉变量 t。材料的均匀性，使得微分方程中的系数成为常数。各向同性减少了材料独立常数的数目。高度对称性减少了问题中的几何参数。把一般三维的场方程简化为二维或一维的场方程，就能减少独立变量的数目。

例 1. 平面应力状态

如一个应力状态只与 x，y 相关，即称为平面应力状态。薄膜在其自身平面内(x，y 平面)承受应力的状态即为一例。如图 4.1 所示。从分析上看，平面应力状态的定义是应力分量 σ_{zz}，σ_{zx}，σ_{zy}处处为零，即

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0, \tag{12.3-1}$$

并且应力分量 $\delta_{xz},\delta_{xy},\delta_{yy}$与坐标 Z 无关。

例 2. 平面应变状态

如果 z 方向上的位移分量 w 处处为零，并且位移 u,v 仅仅是 x,y 的函数而不是 z 的函数，我们就称这种变形为平面应变状态。例如一个长柱体受沿轴向均匀载荷时，柱内的应力状态可视为处于此状态。对于平面应变状态应有

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=w=0 \qquad (12.3\text{-}2)$$

12.4 圆柱形轴的扭转

我们再举轴的扭转问题来示范线性化后弹性理论的应用。轴是用来把扭矩从一个位置转到另一个位置的工具。问题是要通过解纳维尔方程求得轴内应力的分布情况，这个问题的困难程度取决于轴的几何形状。如果一个轴是简单的圆柱体，数字解就很简单；如果轴的横截面不是圆形，或轴不是柱体，其横截面沿轴向变化，那末求解就很困难了。

我们来研究具有圆形横截面的简单圆柱体的扭转问题。图 12.1 表示了所采用的符号和坐标轴。在分析处理问题之前，让我们先看看实际情况。在扭矩作用下，轴产生扭转。把 $z=0$ 处的横截面固定，由于沿 z 轴方向，轴和载荷都是均匀的，所以沿 z 轴的扭角也必定是均匀的，因此就可用单位长度上的扭角 α 来表示变形。α 是不随 z 改变的常

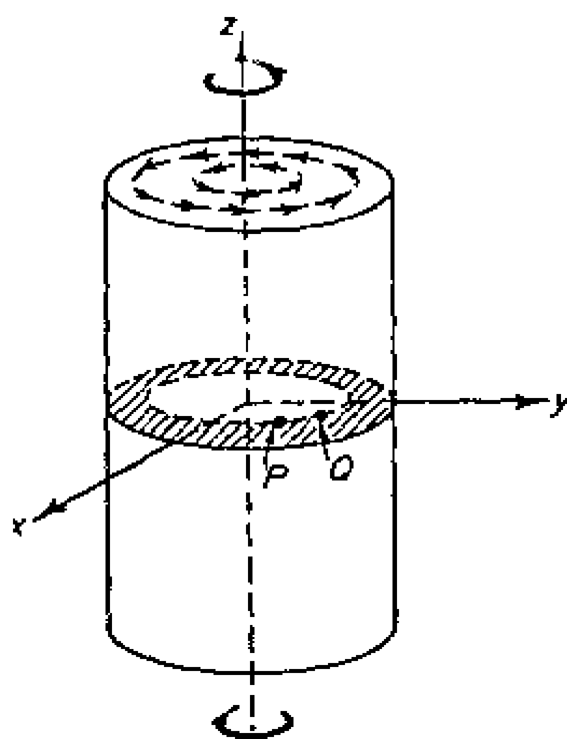


图 12.1　圆轴的扭转

数，它代表 $z=1$ 处的截面相对于 $z=0$ 处截面的旋转。

由于对称性，轴的圆形横截面在扭矩作用下显然仍为圆形。但横截面上的轴向位移是怎样的呢？试看 $z=0$ 处的横截面，在扭矩作用前是一平面，当受到扭矩 T 作用时，边界条件是轴对称的，因此任何轴向位移也必须是轴对称的。若将 z 轴颠倒过来，此边界条件依然不变，所以轴向位移必须为零，横截面仍为平面。

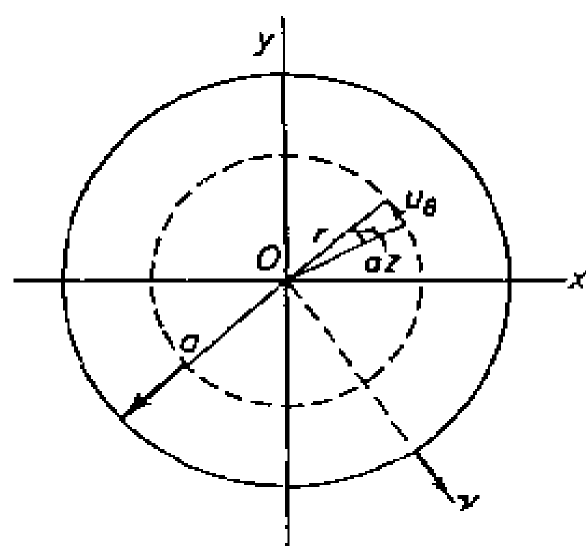


图 12.2 坐标标记和转换

综上所述，我们看到圆柱形轴在扭矩作用下的形变必定使柱的许多横截面以相同的扭率相对旋转。因此，在 (x,y,z) 处质点位移的极坐标形式必是

$$u_r=0,u_\theta=\alpha zr,u_z=0 \tag{12.4-1}$$

如用直角笛卡尔坐标表示，则必有

$$u_x=-\alpha zy,u_y=\alpha zx,u_z=0 \tag{12.4-2}$$

如图 12.2 所示。

现在我们要证明上式确实是正确的。由于位移给定了，就没有必要检查协调条件了，但是我们必须检查平衡方程和边界条件。

由方程(12.4-2)我们得到下列的应变分量

$$\begin{aligned}
&e_{xx}=0,e_{yy}=0,e_{zz}=0,\\
&e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}(\alpha z-\alpha z)=0,\\
&e_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{2}\alpha y,\\
&e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\alpha x.
\end{aligned} \tag{12.4-3}$$

由应力一应变关系产生相应的应力分量为：

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=0,$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= -G\alpha y, \\
\sigma_{yz} &= G\alpha x.
\end{aligned}
\qquad (12.4\text{-}4)
$$

这里 G 是轴材料的剪切模量。

略去方程(12.1-5)中的 a_i 和 X_i，得到平衡方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}
\qquad (12.4\text{-}5)
$$

方程(12.4-4)所给出的各个应力分量显然满足这一组方程。

这个问题的边界条件包括：在侧表面上应力为零，而在两端的力，其作用相当于扭矩。由于端部没有拉伸与压缩，故又有：

$$
\sigma_{zz} = 0(\text{在 } z = -L \text{ 及 } z = L \text{ 上}) \qquad (12.4\text{-}6)
$$

此式满足方程(12.4-4)。

作用在侧表面上的应力向量，用 $\overset{\nu}{T}_i$ 来表示。这里 ν 表示垂直于侧表面的向量。由柯西公式

$$
\overset{\nu}{T}_i = \nu_j \sigma_{ij} \qquad (12.4\text{-}7)
$$

令 $i=1,2,3$，得到三个方程

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx}\nu_x + \sigma_{xy}\nu_y + \sigma_{xz}\nu_z &= 0, \\
\sigma_{yx}\nu_x + \sigma_{yy}\nu_y + \sigma_{yz}\nu_z &= 0, \\
\sigma_{zx}\nu_x + \sigma_{zy}\nu_y + \sigma_{zz}\nu_z &= 0.
\end{aligned}
\qquad (12.4\text{-}8)
$$

式中 ν_x, ν_y, ν_z 是侧表面法向量的方向余弦。显然，从图 12.2 可见到，侧表面上的法向量 ν 与径向量一致，因此，ν 的分量为

$$
\nu_x = \frac{x}{a}, \nu_y = \frac{y}{a}, \nu_z = 0. \qquad (12.4\text{-}9)
$$

因此，在圆周 C 上的边界条件是：

$$
\begin{aligned}
x\sigma_{xx} + y\sigma_{xy} &= 0, \\
x\sigma_{yx} + y\sigma_{yy} &= 0, \\
x\sigma_{zx} + y\sigma_{zy} &= 0.
\end{aligned}
\qquad (12.4\text{-}10)
$$

方程(12.4-4)也能使它满足。

尚待检查的只有作用在 $z=-L$ 及 $z=L$ 两个端面上应力等价于扭矩的条件。参照图 12.3 并利用方程(12.4-4),作用在端部横截面上应力的合力为

$$
\begin{aligned}
&\iint \sigma_{xz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -G\alpha\iint y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -G\alpha\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}y\mathrm{d}y = 0,\\
&\iint \sigma_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = G\alpha\iint x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \qquad (12.4\text{-}11)\\
&\iint \sigma_{zz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}
$$

因此,正如所期望的那样,合力为零。但对于 z 轴的合力矩为

$$
\iint (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{12.4-12}
$$

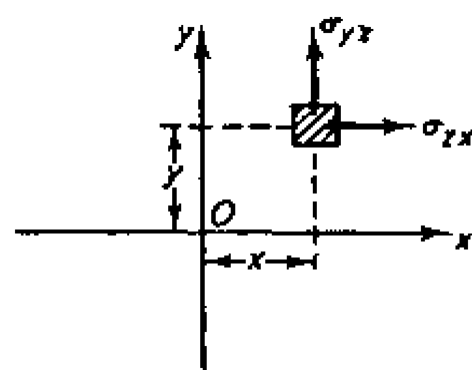


图 12.3 扭轴中的应力

把方程(12.4-4)代入,得到

$$
\begin{aligned}
\text{力矩} &= G\alpha\iint (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= G\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r\\
&= \frac{2\pi}{4}G\alpha a^4.
\end{aligned}
$$

于是,我们得到的合力矩在数值上确实等于扭矩 T:

$$
T = \frac{\pi}{2}a^4 G\alpha \tag{12.4-13}
$$

现在检查已经完成了,所有的平衡方程和边界条件都满足。包括在方程(12.4-1)到(12.4-4)中的解是精确的。

12.5 梁

用来传递弯矩和横向剪力的结构元件叫做梁。在工程中经常用到梁,所以梁是重要的研究对象。我们所站立的地板就是支撑在

梁上。飞机的机翼是一个梁，桥是由梁组成的，…等等。工程师应该知道梁中的应力和变形，怎样选择梁的材料，怎样通过合理的几何设计来有效地利用材料。怎样使重量最小，怎样把梁的刚度和稳定性增加到最大，怎样利用支承使振动最小，怎样计算作用在梁上的载荷(静止载荷与运动载荷，建筑物上的风载，飞机上的空气动力载荷等等)，怎样分析梁(如机翼、船舶结构)在运动流体中所受到的气体弹性或水弹性的相互作用等等。

一个梁可以根据其端部支承条件来分类：一个端部能够自由旋转，但其侧向平移受到限制，则该端可称为简支端。如一个端部能够自由旋转和挠曲，则可称为自由端。如一个端部的平移和旋转都受到阻止，则可称为固定端。

在 1.11 节中已研究了均匀各向同性虎克材料棱柱形梁的纯弯曲，推导出一些结果，但在那里没有检查控制全部场的方程式和边界条件。现在让我们来证明所有这些条件都能满足。

在图 1.14 中表示了棱柱形梁的纯弯曲。把两个大小相等方向相反的力矩 M 作用在该梁横截面的对称平面内。把参考轴 x,y,z 选得和 7.7 节相同：原点位于横截面的形心上。在 7.7 节我们导出了梁中的应力分布：

$$\sigma_{xx}=\frac{Ey}{R},\quad \sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=\sigma_{zx}=0, \tag{12.5-1}$$

$$\frac{M}{EI}=\frac{1}{R},\quad \sigma_{xx}=\sigma_0\frac{y}{C},\quad \sigma_0=\frac{MC}{I} \tag{12.5-2}$$

这里 C 是从中性面到横截面外层纤维的距离，M 是弯矩，E 是弹性模量，I 是横截面面积惯性矩，σ_0 是外层纤维应力。因此，应变为

$$e_{xx}=\frac{y}{R},e_{yy}=-\nu\frac{y}{R}=e_{zz},\qquad e_{xy}=e_{yz}=e_{zx}=0 \tag{12.5-3}$$

由此看到，它满足平衡方程(12.4-5)，也满足协调方程(6.3-4)。梁侧表面上的边界条件是 $\overset{\nu}{T}_i=0$。由于侧表面上的每一条法线都垂直于纵轴 x，所以方向余弦 ν_x 为零；即在侧表面上 $\nu_x=0$。于是它满

足下列边界条件：

$$
\begin{aligned}
\overset{\nu}{T}_x &= 0 = \sigma_{xx}\nu_x + \sigma_{xy}\nu_y + \sigma_{xz}\nu_z, \\
\overset{\nu}{T}_y &= 0 = \sigma_{yx}\nu_x + \sigma_{yy}\nu_y + \sigma_{yz}\nu_z, \qquad (12.5\text{-}4) \\
\overset{\nu}{T}_z &= 0 = \sigma_{zx}\nu_x + \sigma_{zy}\nu_y + \sigma_{zz}\nu_z.
\end{aligned}
$$

梁端部的边界条件是，应力系统必须相当于一个纯弯矩而不引起合力。正如在 1.11 节中所讨论的那样，方程(12.5-1)给出的应力系统能做到这一点。如果梁端部处的边界应力分布精确地按照方程(12.5-1)所规定的方式，由于满足所有的微分方程和边界条件，所以解是精确的。

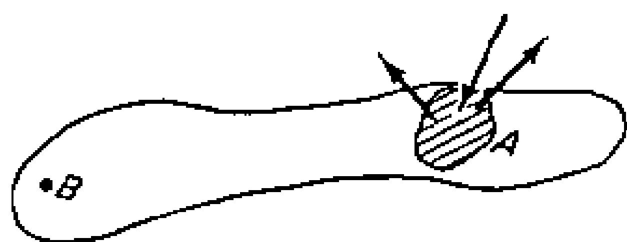


图 12.4　梁的非对称横截面

在 1.11 节推导中，曾加了一个限制，即梁的横截面有一个对称平面，现在可以取消。我们来研究如图 12.4 所示的任意横截面形状的棱柱形梁。假定应力和应变按照方程(12.5-1)，(12.5-2)和(12.5-3)来分布。边界条件(12.5-4)也满足。当原点取在横截面的形心上时，轴力的合力也等于零。通过在横截面 A 上的面积分，可得到端部剖面上的作用力对 z 轴的合力矩，

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} y \mathrm{d}A = \frac{E}{R}\int_A y^2 \mathrm{d}A = \frac{EI_z}{R}.$$

这里我们用下标 z 表示弯矩和横截面的面积惯性矩都是对 z 轴取的。其余的方程式均和以前相同。但是对 y 轴的合力矩则是一个必须考虑的新因素。此力矩由在小面积 $\mathrm{d}A$ 上的作用力 $\sigma_{xx}\mathrm{d}A$ 的积分得到。$\mathrm{d}A$ 是一个面积元素，它离 y 轴的距离为 z。所以力矩是

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z \mathrm{d}A \qquad (12.5\text{-}5)$$

把方程(12.5-1)代入上式，我们得到

$$M_y = \frac{E}{R}\int_A yz \mathrm{d}A \qquad (12.5\text{-}6)$$

上式中的积分是横截面的惯性积的负值

$$P_{yz} = -\int_A yz\mathrm{d}A \equiv -\iint_A yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{12.5-7}$$

因此，

$$M_y = \frac{-EP_{yz}}{R} \tag{12.5-8}$$

假如梁的横截面内有一个对称面，而弯矩正作用在这个对称面内，则我们可选此对称面为 xy 平面而使 $P_{yz}=0$。由此可得 $M_y=0$。这就表明在 1.11 节中的解是满足了 $M_y=0$ 这条件的。在一般的情况下，我们可以通过选取坐标轴使惯性积为零，即

$$P_{yz} = 0, M_y = 0, \tag{12.5-9}$$

同时力矩向量平行于 z 轴，在数值上等于 M_z。

如果 y 轴和 z 轴是惯性主轴，惯性积就等于零。因此为了使作用在某个平面内的力矩引起同一平面内的弯曲，这个平面必须是主平面，即包括每个横截面的一个主惯性轴的平面。综合(1.11-27)和(12.5-9)的要求，我们看到，必须把坐标轴 y,z 选为面积惯性矩主轴方向的形心轴。

至此我们已经证明完成。可以看出，只要 y 是从主轴方向的中性轴来度量，由方程(12.5-1)给出的应力系统就是精确的。此应力系统满足平衡方程、协调方程和边界条件。在这种情况下，平面截面仍为平面的直观假定得到证明。

可以从其他一些书中得到更精确的弯曲理论。如可看索科尔尼科夫(Sokolnikoff)的《Mathematical Theory of Elasticity》。

12.6 生物力学

连续介质力学可以应用于生物学。在合适的观察尺度下，大多数的生物材料可以看成是连续介质体。在第九章，我们已讨论了一些生物组织的本构方程式。多数的生物流体和生物固体具有非线性的本构方程式。骨骼似乎是一种特例，在小应变的范围内，它是

遵从虎克定律的。但骨骼的形状和构造是非常复杂的。

在生物学问题中，流体力学和固体力学往往是结合在一起的。例如：血液在具有弹性壁的血管中流动，心脏由心肌泵出血液，因此，在生物力学中，通常是将 11 章和 12 章的方程结合在一起使用。

生物组织具有非生命材料不可比拟的独特的性能，这就是在应力作用下组织的重建特性。由于重建，材料的零应力状态，本构方程式和力学性质都发生了改变。在下一章将专门讨论这一连续介质力学的新概念。

习 题 12

12.1 研究正方形截面轴的扭转，写出所有的边界条件。证明包含在方程(12.4-1)到(12.4-4)中的解不再满足所有的边界条件。

12.2 圆柱形轴承受扭转的基本理论已在 12.4 节中介绍了。假设 z 为轴的轴线，轴的两端 $z=0$ 和 $z=L$，采用直角笛卡尔坐标参照系 x,y,z。在 x,y,z 方向上的位移分量分别为 u,v,w。基本理论给出。

$$u = -\alpha z y, \quad v = \alpha z x$$

式中 α 为轴单位长度的扭转角。基本理论没有谈到在轴线方向的第三个位移分量，如果轴为非圆截面，w 通常将不为零。假设此未知的位移为

$$w = \alpha\phi(x,y)$$

用平衡方程(纳维尔方程)求证函数 $\phi(x,y)$满足方程，此函数为已知的弯曲函数。

12.3 下面情况提出对复合材料设计应注意使用条件的结构的稳定性问题。现研究一个具有矩形截面的悬臂梁。该梁材料中包埋了两根高强度的棒。外载荷 P 与横截面上两棒中心的连线相平行(见图 12.3)。在实际应用中，在载荷的作用下，存在着梁因扭曲而破坏的问题。当载荷 P 超过某一临界值时，扭曲将会发生，试推导扭曲失稳外载荷 P 的临界值理论计算公式。根据该理论，将如何设计此复合梁?

12.4 密度和材料不均匀的弦线，在两点之间受张力作用(譬如一根小提琴弦或钢琴弦)，在某一点撞击弦线而产生振动。用数学求解这一问题，

给出其微分方程式和边界条件。

12.5 研究管弦乐队中的锣。建立锣的振动数学表达式。

12.6 用数学公式来描述天空中飘浮的云，它们是如何运动的？包括足够的参数能将你每天看到的巨大变化描述和推断出来。

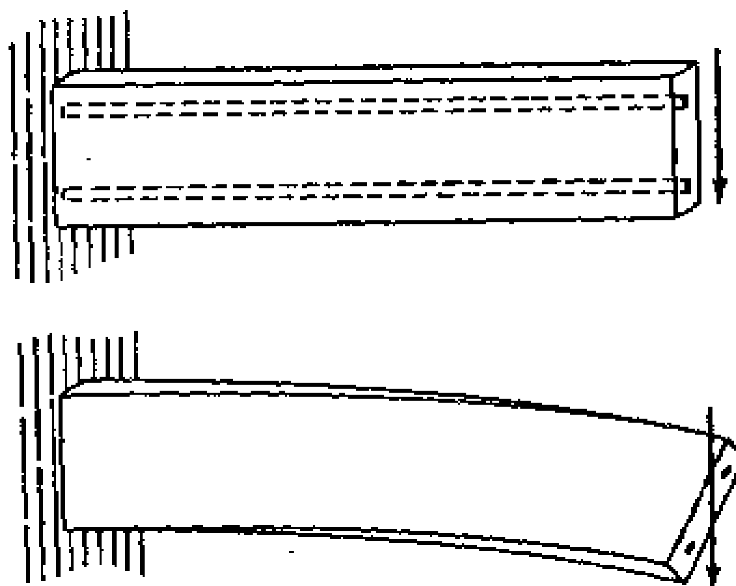


图 $P12.3$ 在载荷作用下，非常窄的梁将会扭曲，用高强度棒增强的复合梁的扭曲将有一个临界值问题。

12.7 一架飞机相对于地面以速度 V 在空中向前飞行，机翼是怎样保持这种飞行的？要回答这一问题，对空气和机翼写出场方程式以及在空气和机翼界面处的边界条件。并从数学理论出发，表示出完全求解的足够方程组。

12.8 当火车驶近时在铁轨中的弹性波被当成许多动力学问题的典型波。在尚未能看到火车以前，我们就能听到火车车轮撞击铁轨的声音（如果将耳朵附在铁轨上）。当火车驶近时，我们可以看到车轮下铁轨的挠度。用数学方法阐述这一问题，并能够显示出上述的两个特点。

12.9 在你的手腕处可感觉到脉搏跳动。它是动脉中的一种复合弹性波。其中最为重要的部分无疑是动脉对血液中压力波的弹性响应。其次是其他的波沿动脉壁传播并引起上游和下游的扰动。我们的动脉是弹性体，用数学理论表达脉搏波传播。Leenhard Euler（1707--1783）早在1775年分析了这一问题。

12.10 Galileo（1564—1642）建议用如下的方法来测量锣的振动频率。一把锋利的小尖刀捆在细长的棍上，在锣的上方以一恒定的速度拉棍子移动，锣的振动将引起棍子颤震。检查锣的金属表面，并测量标记的空间，根据这些数据可以计算出锣的振动频率。

解释这一方法是否正确。将怎样来计算频率？用弹性理论的观点以数学公式来解决该问题。假定一面优质的定音锣，肯定是一种线弹性

固体材料，遵从虎克定律。

12.11　在机床中的颤震现象与Galileo进行的实验相类似。研究高速车床，用公式说明机床的颤震问题，它将使一台优质机床报废。提出减轻颤震的措施。

12.12　写出振动梁的微分方程和边界条件并写出确定梁的振动频率的方法。

12.13　一圆柱形轴绕其长轴线以角速度 ω 弧度/秒旋转，该轴两端是简单支承，当轴旋转时，横向振动总可能发生，但当轴的转速达到某一临界值，横向位移巨增，称为临界转速。用数学描述这一现象，用公式确定此临界转速。

12.14　飞机推进器的轴承受张力和扭矩。你怎样测量飞机飞行中轴的应力？你怎样测量飞行中推进器提供的功率？

13 应力、应变和结构的自主重建

用生物学中的实例来说明连续介质力学中的某些基本问题：零应力状态；由于材料的重建使零应力状态和本构方程改变；应力、应变对重建的影响；生长与吸收的反馈。无生命自然系统也具有这些特性。

13.1 概 述

在最后这一章里，我们讨论材料在应力下变化的力学。用力学的观点来看，有三个方面在固体的变化中起着基本作用：零应力状态、本构方程、整个物体的形状及尺寸。我们将着重在这三方面讨论。

有关流动和变形的力学称为流变学(rheology)。通常流变学仅讨论一个不变的材料或一组若干个给定材料的混合物的流动与变形。在生物学里，研究材料的生长和变化却是关注的焦点。在连续介质力学中，流变学和生物学结合起来了，为了阐明能变化的材料的连续介质力学，我们将从生物界中举出一些普遍存在的实例。在下面的讨论中，就常以血管为代表。

13.2 如何发现固体材料的零应力状态

在前面几章里，当物体不受外力时，我们假定在物体内各处的应力均为零。这当然是可能的，也是自然界与工程界一般的情形，但却并不是非这样不可。例如我们安坐着，却可驱使体内的肌肉收缩，给肌肉和骨骼以很大的力。没有外力的作用而在体内存在的应力称为残余应力(residual stress)。一般情形之下，残余应力可能是零，但有些时候，残余应力和残余应变可能存在而且可能有巨大无比的影响。例如：地球版块内的残余应力，大到引起破损或松弛时，即能引发地震。在核反应炉中，若有过大的、不应该有的热应变，可能会导致毁灭性的灾难。

发现固体中有没有残余应力最简单的方法是将该固体切开。切开使该物体内产生两个新的表面，这表面上的牵张力为零。切开一个没有残余应力不受载荷的物体，将不会引起应变。如果切开的结果引起了应变，那就表明有残余应力存在。

以一段血管为例：如果垂直于血管的长轴沿横截面方向剪两刀，得到一个圆环。如果再在环的径向切开，此环将会自动张开成一个扇形(见图 13.1)。根据静力学平衡方程式，在此张开的扇形血管的端面上，合应力和应力矩都为零。假使切开，张开后的血管内还有残余应力，则这些残余应力也必保持平衡。我们可以再切、直至继续切不再产生附加应变为止。如果我们继续切而不再产生附加的应变，则此时的血管块可认定为已达零应力状态。冯元桢和刘树谦(1989)研究了老鼠的动脉，研究表明每个圆环切一刀就已达到零应力状态。

上述血管切开并张开的状态即是血管的零应力状态。对每一张开的扇形，我们可用张开角来表征。张开角的定义是扇形的内壁的中点向内壁的两个端点连线间的夹角(见图 13.2)。在图 13.1 中第一列表示出正常年轻老鼠的主动脉的零应力状态(冯元桢、刘树谦 1989)。整个主动脉在各部位逐次切下若干段，每段长度约等

于直径，然后将每一段沿径向切开，可以发现张开角沿主动脉轴向方向变化：在升主动脉约为 160°，主动脉弓为 90°、胸主动脉为 60°，在膈平面处为 5°、直至骼动脉分叉点为 80°。

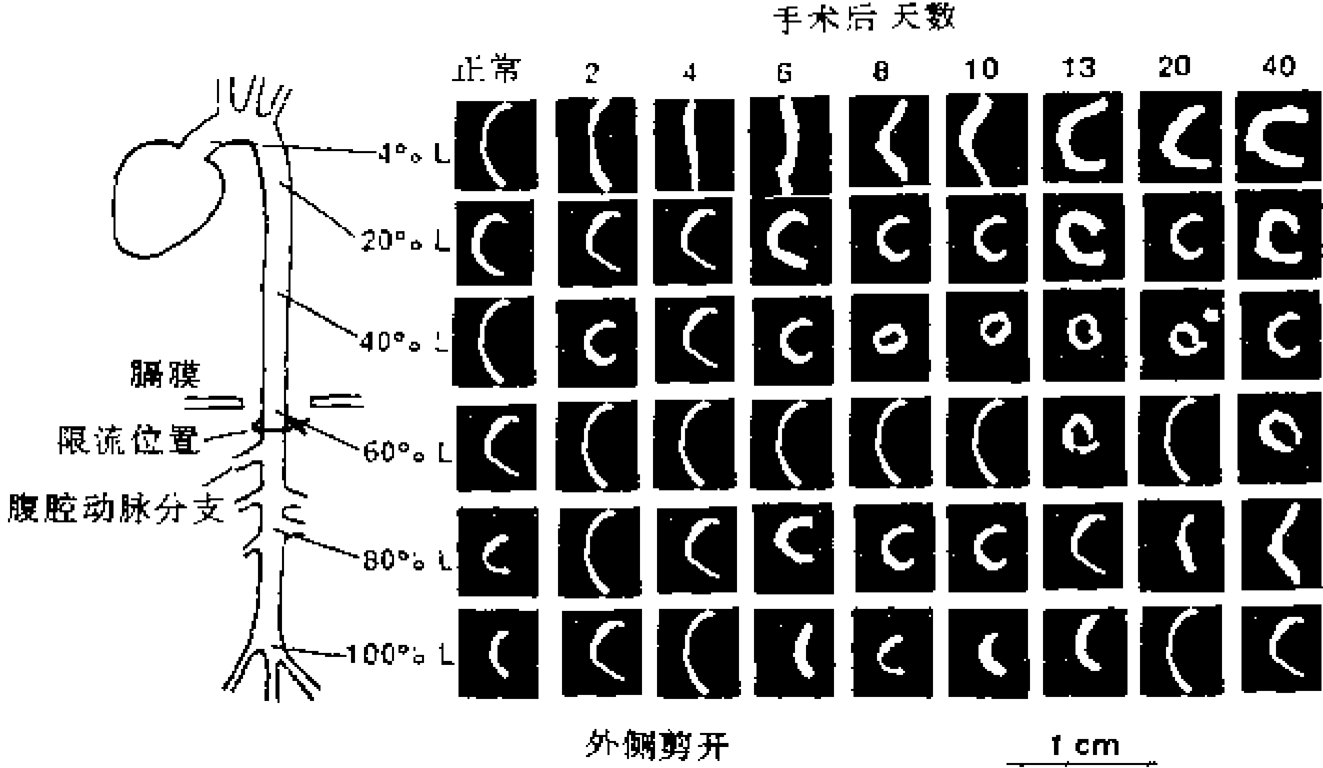


图 13.1 老鼠主动脉在零应力状态下呈扇形横截面的像片

第一列表示正常老鼠主动脉零应力状态。其余各行表示造成突然性高血压使血管重建后的零应力状态改变。图中从左向右是按手术后的天数排列。由上至下是按主动脉标本所处位置排列.从主动脉瓣至骼动脉分叉点为主动脉全长，按长度的百分数来表示。引起高血压的金属夹所在位置在图的左端画出。图上动脉壁不很光滑是由于有些组织粘在了壁上。在看这些图片时，可以想像删掉这些组织。此图来自冯元桢和刘树谦(1989)的实验报告

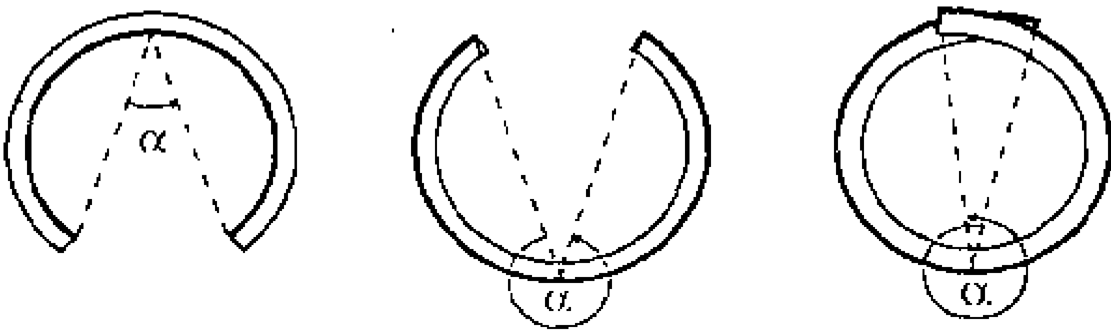


图 13.2 张开角的定义

扇形是血管在零应力状态下的圆周横截面。从血管内壁中点向内壁两端点连线间的夹角定义为张开角。

沿髂动脉向下至老鼠的一只腿部，在髂动脉张开角约为100°，往下在腘动脉区为50°，在胫骨动脉区又升至100°，在足底动脉中部微动脉直径为50μm，其张开角约为100°（刘树谦和冯元桢）。

尽管不完全相同，猪和狗的主动脉张开角有类似的变化（韩海潮和冯元桢 1990）。老鼠的肺动脉（冯元桢、刘树谦 1991）、肺静脉（谢嘉平等 1991）和气管（韩海潮等 1991）也存在明显的张开角。因此，一般讲，在零应力状态，血管和气管是一连串扇形体，这些扇形体的张开角随着横截面在血管和气管所在位置和动物的种类而变化。换言之，在物体中的零应力状态的特征，可随其所在位置而变化，所以残余应力也是不均匀的，是随部位而变化的。

在工业上，在加工过程中，通常引起固体中的残余应力。金属在有应变时焊接、铆接会使飞机、桥梁和机器产生残余应力。在金属成形和机械加工时产生塑性变形和蠕变会产生残余应力。压力装配也是另一种原因。土木工程中，拉紧钢棒使之产生预应力以加固钢筋混凝土梁的强度。兵工中用加热圆柱形外壳至高温，装配入内壳然后冷却至室温的方法使炮筒内壁上产生压缩残余应力，外壁上产生张应力残余应力。当炮发射时，这些残余应力可以减小在炮筒内壁的应力集中。金属加工工业中，有在金属体表面喷射小弹以敲击而使表面产生压缩残余应力的方法，以增加金属体的疲劳寿命。新的技术，用高速度的离子或分子束射击金属或陶瓷体的表面，使在表面薄层里产生压缩残余应力，以增加其使用寿命。多数工业产品，都有有益或无益的残余应力。

对于有生命的组织而言，生长和变形是自然发生的。每一个细胞或细胞外基质的生长和吸收使组织的零应力状态发生改变，从而引起残余应力。在生物学研究中，测量在零应力状态的变化要比测量组织中细胞的活动要容易得多。因此，观察残余应力的变化是生物学中的定量工具。

在无数自然界和工业界中的实例里，我们将选几个生物学的例子来说明体内应力对身体组织的影响。我们常谈的本构方程，应

力一应变的关系，是短时间内的关系、若考虑时间，则应力不单影响应变，而且也影响老年化、重建、磨损、撕裂、生长和吸收。生物学家用术语“内环境稳定”来描述正常生命的情况。他们用“内环境稳定的设置点”来描述在正常情形下生命器官的定性数据。在内环境稳定的情形下，在体（*in vivo*）器官有一定的应力范围。当环境改变时，应力范围相应发生改变。在体内的细胞，由于应力的改变，就修改其自身，因此在体组织产生重建。在效果上，器官的零应力状态也发生了改变。随之，组织的力学特性也发生重建了。我们熟悉在自己体内的这些变化。我们知道，内环境稳定不是静止不变的，但在动态环境中，一种确凿的正常模式是存在的。在以下几节中，我们将作一些定量的观察，使我们对这种动态模式的概念变得更清楚些。

在机械的和无生命的物体中，也可能有类似的内环境重建的情形，对这些情形作科学的研究，是有意义的。

13.3 结构在零应力状态下的重建：由于应力变化而发生自主重建的一个生物学实例

在一个高血压实验中，用一个金属的小夹，夹在老鼠腹部的主动脉上，使血流阻塞而造成高血压（见图 13.3）。此夹子压迫了主动脉，使正常的横截面面积减少了 97%（冯元桢和刘树谦 1989），上游血管内的压力突然升高了 20%，下游血管内的压力突然降低了 55%。随后，血压又逐渐上升，其变化过程表示在图 13.4 中。在身体上部，血压开始上升很快，然后变为平缓，40 天后，约比正常值升高了 75%。在身体的下部，血压约在手术后 4 天恢复到正常，随后缓缓继续增高。增至大于术前 25% 后趋于稳定，在血压变化时，主动脉的零应力状态也产生了变化。此变化表示于图 13.1 中，在图中所取的扇形的横截面的位置是以该位置至主动脉瓣的距离除以主动脉的全长的百分数来表示的。依次各列表示手术后在 0、2、4…40 天时，老鼠主动脉试样在零应力状态时的形状变化。

在图中显示，随着血压的突然增加，张开角亦逐渐增大，峰值

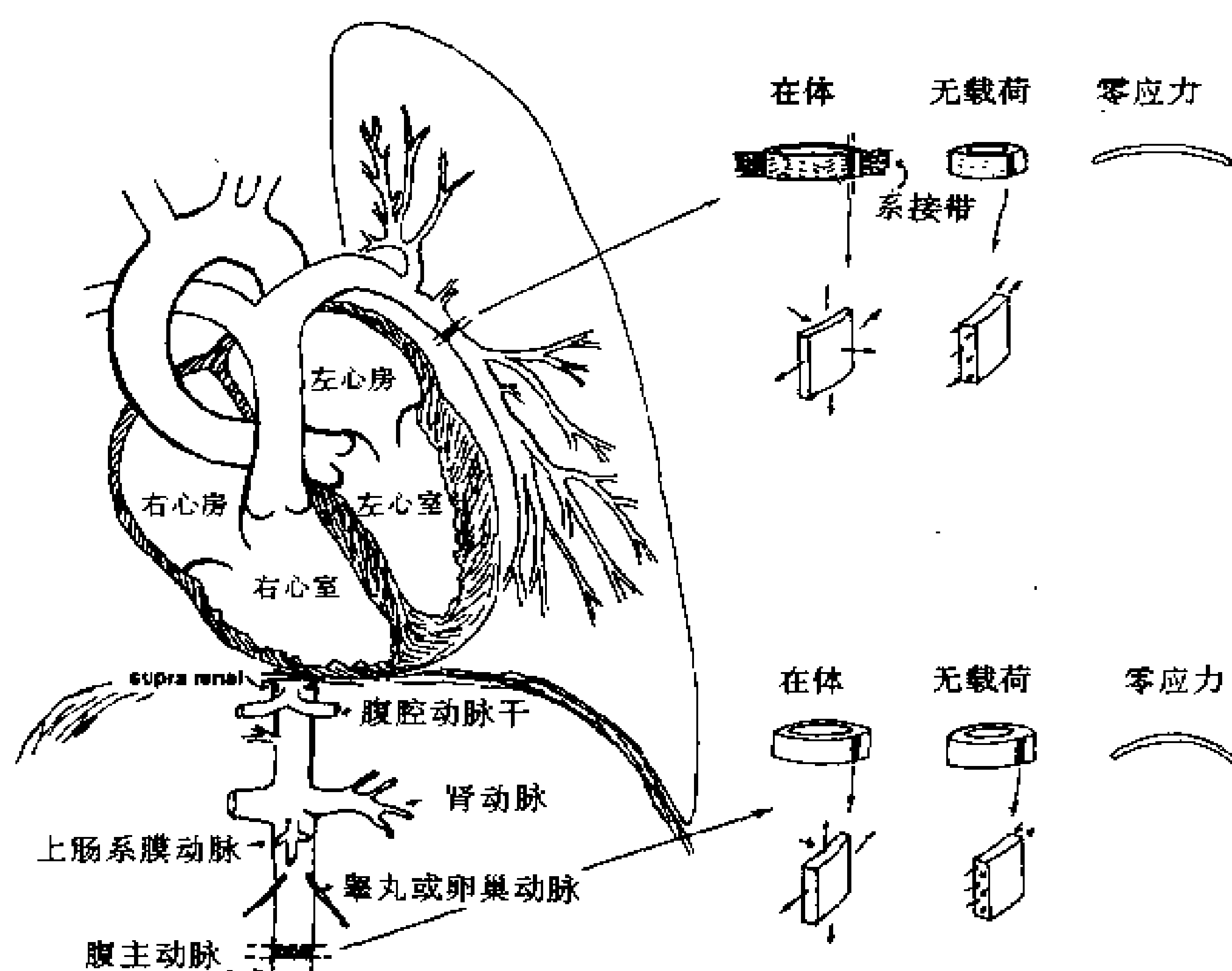


图 13.3 心脏、主动脉和肺动脉简图

图示在各血管中的应力、零应力状态，以及与在上文中提到的用压迫主动脉来控制血压的手术相关的各血管的名称。

出现在术后 2 至 4 天，然后逐渐趋于一渐近值。扇形张开角随截面在主动脉上的位置而异。其变化是很明显的。张开角最大变化发生在升主动脉处，该处张开角度的变化幅度大于 88°。

所以，随着血管内压力的变化，血管的张开角亦在几天内发生变化。类似的变化在老鼠的肺中也得到证实。老鼠的肺血压可以因呼吸的气体缺氧而升高（如将老鼠放置在 10%O_2 和 90%N_2 的缺氧舱中，而总压力等于大气压的情形）。

结论是，血管的零应力状态可以因应力的改变而改变。这是生物组织自主重建的过程。

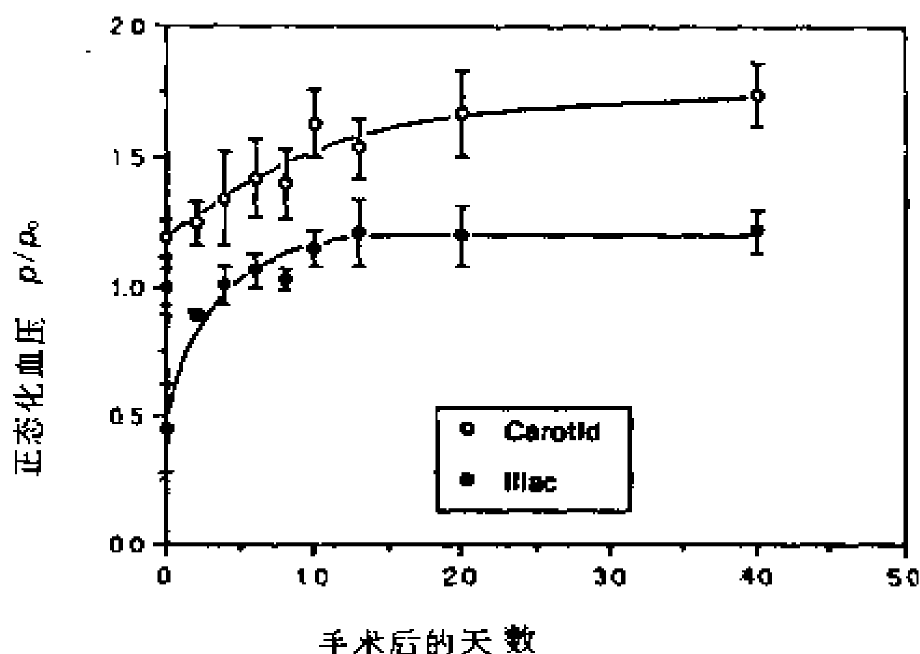


图 13.4　当一个阻塞突然加于主动脉上，在阻塞前后（见图 13.3）血压的变化过程

血压按手术前的压力做归一化处理。自冯元桢和刘树谦(1989)

13.4　零应力状态随温度而变化：形状"记忆"材料

材料的力学特性与许多物理、化学和生物的因素有关。在上一节里我们介绍了生物由于对应力的反应，其材料的零应力状态能发生变化。下面我们来考虑另一物理因素—温度的影响。众所周知，在任一已知的应力状态下，应变随温度变化而变化。因而热应力的生成，可以看成是由于温度的改变而使零应力状态改变的结果。

有些物体因其零应力状态随温度而改变，而且有相当奇妙的性能。例如用某种塑料制成的帽子可以折叠以便于携带，而受热后即可回复到原来形状。一种用某种塑料制成的医疗装置已在日本用于关闭婴儿的动脉导管，该导管是婴儿心脏与肺之间的联接管。在出生以前它能使血液从主动脉流到肺动脉。在出生后，通常就立即关闭了。但有时它仍是打开的，那就需要做手术。上面命名的这个装置像一把小伞，折叠起来通过内导管穿过该导管。然后该装置

从插管喷出一小股热水把伞打开，张开的伞关闭了此连接管。

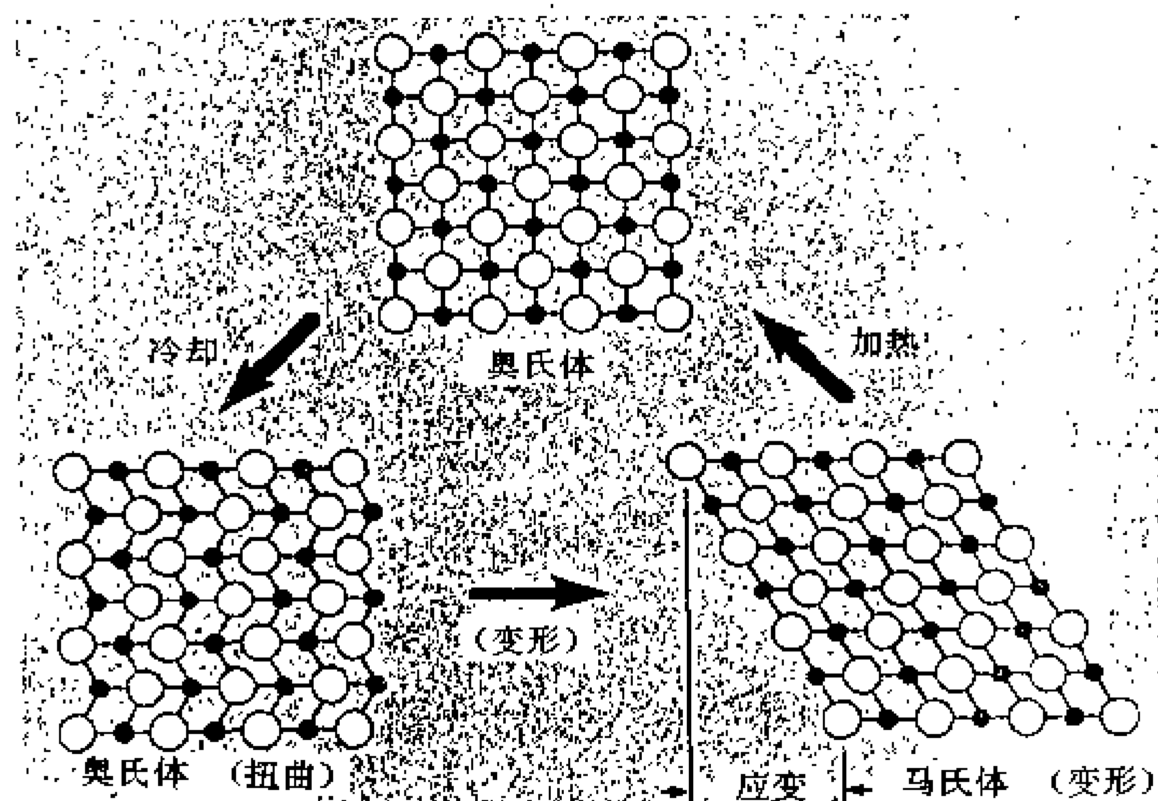


图 13.5 高温下奥氏体态镍钛合金形状记忆机制

当晶体结构是马氏体时合金在低温时能发生双晶式的变形。这种变形在马氏体受适当的剪应力作用下产生。双晶变化是可逆的，若变形后材料的温度上升到某一临界温度时，合金的晶格结构回复到奥氏体，物体的形状回复到原始成形时的形状。根据 Tom Borden"形状记忆合金"(1991)

像这一类材料，它们具有"记忆"其初始形状的功能，其形状随温度变化而改变，基本理由是其零应力状态随温度而异。铜铝镍、铜锌铝、铁锰硅、镍钛等合金和某些聚合物(如 polynorbornene)都具有这种特性。如一种镍钛合金(Ni—Ti)，由相等的镍原子和钛原子所组成，在高温下制造成形，在低温时可以改变成其他形状。如果该变形体受热超过了临界温度，镍钛合金将重新回复到其加工成形时的原始形状，如果阻止其变形，在物体内能产生高达700MPa(10^5Psi)的残余应力。这种在合金中产生的变形是由于马氏体式的转变而引起的。马氏体具有较低的屈服应力，很容易并可逆地改变其结晶格式，服从所谓原子晶格的双晶过程(见图13.5)。这种马氏体的转变在一定的温度范围内发生，受热的马氏体转变

为奥氏体。当奥氏体冷却后变成马氏体，由随机的内残余剪应力在金属中产生随机的双晶变化，在外剪切载荷的作用下，马氏体可以发生明显的可逆性双晶式变形。在受热时，当温度达到马氏体相变温度时，马氏体的结晶全部变成奥氏体结晶，该物体即恢复其原始成形时的形状，因为奥氏体是不能接受双晶类型变形的。

马氏体和奥氏体的应力—应变曲线，表明在图 13.6 中。当马氏体应变超过 7%，奥氏体应变大于 1%时，二者都会产生不可逆的塑性变形。故在实际应用时，我们必须知道其应力—应变曲线和其弹性和塑性的范围，也应当知道当受热时在马氏体中首先生成奥氏体的温度及在冷却时在奥氏体中首先生成马氏体的温度。具有了这些知识，我们就可以应用 Ni—Ti 合金做各种设计，如加固机器部件，用金属丝矫正牙齿，模拟器官的功能以及其他应用。

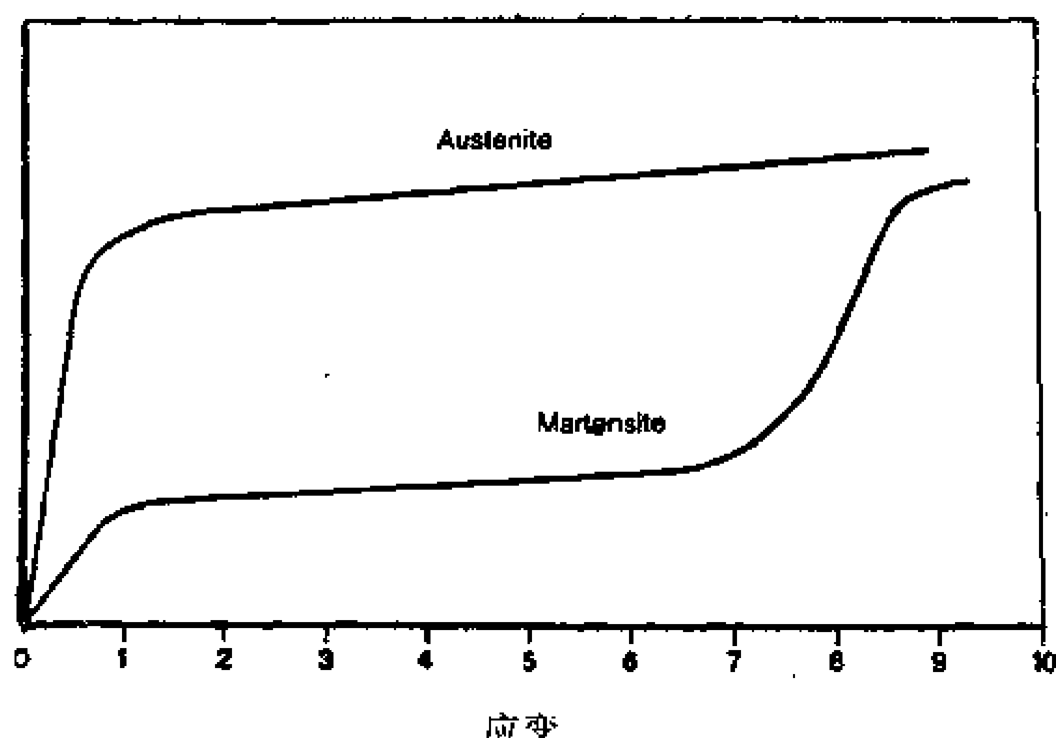


图 13.6 在不同温度下马氏体和奥氏晶体的应力—应变关系

根据 Tom Borden

13.5 由于血压改变血管的形态和结构的重建

血液循环中的压力时时在变，处处不同。我们平常说的循环系统的血压，是指主动脉中在心脏动脉瓣处的压力与右心房中的压力之差。这个压力差，推动了血液循环全身(叫做外周循环系统)。驱动肺循环的血压则是肺动脉在心脏的肺动脉瓣处的压力与左心房中的压力之差。外周循环和肺循环两套系统的血压同时由收缩压的高峰(在心脏收缩期末)降低至舒张压的低谷(在心脏舒张期末)之间，周而复始，循环不已。当这些压力变化时，在体内每一处血管的压力都相应地变化着。当血管内的压力变化时，血管壁内的应力也相应变化。

如图 13.3 所示，在体内正常血压的作用下，血管壁中的周向应力通常是张应力而且是血管中最大的应力分量。轴向应力分量是存在的，因为在轴向方向血管通常承受拉力。径向应力分量是压缩应力。在血管内壁，径向应力等于血液的压力，在血管的外壁，径向应力等于体液的压力。后者小于血压，二者都远小于周向应力。

循环系统的血压可因下列因素而变化：药物、高盐食物、阻塞肾脏的供血量等。如果在肾动脉的上方由于动脉狭窄而使主动脉造成某种阻塞(图 13.4)，在狭窄的上方主动脉将造成高血压。在狭窄部位下方的主动脉首先变成低血压，但这减少了肾脏的血液供给，将引起肾脏分泌出较多的高血压蛋白酶原进入血液中，使血压升高。如果主动脉的狭窄位置在左右两个肾动脉的下面，则肾脏不致分泌高血压蛋白酶原，所以肢体下部的低血压可以长期维持。肺血压也有几种方法控制。最方便的方法是改变动物呼吸的气体的氧气浓度。如果氧的浓度低于正常值(即缺氧状态)，肺血管中的平滑肌细胞收缩，血管的直径减小而肺动脉的血压升高。这就是生活在海平面地区的人突然到高原或高空后的反应。

由缺氧而引起的肺动脉血压增高反应发生得相当快。如果将一只在海平面地区的老鼠放入含氧 10% 含氮 90% 的低氧舱内，在

数分钟内，其肺动脉的收缩压将从正常值 2.0kPa(15mmHg)升到 2.9kPa(22mmHg)，在一周内升到 3.6kPa，在一个月内逐渐升到 4.0kPa，与此同时，老鼠的周身血压除肺以外基本不变。在肺血压如此高时，肺血管发生自主重建。

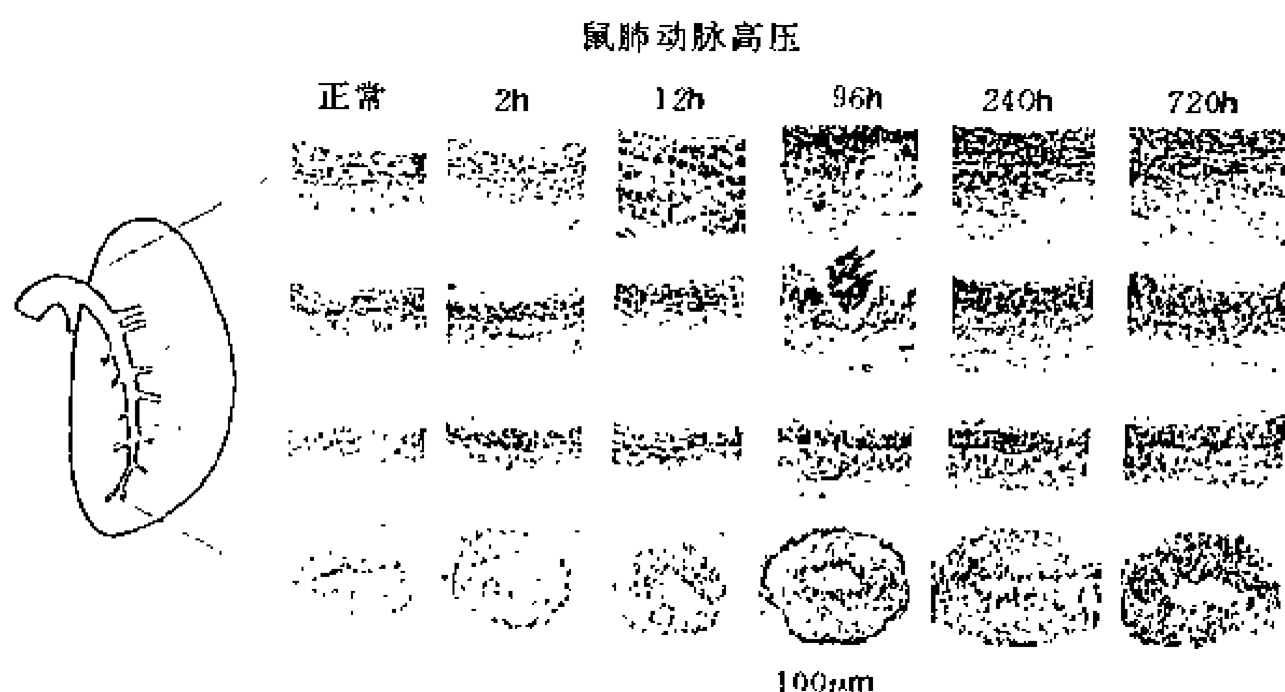


图 13.7　正常鼠的肺动脉切片图及由于缺氧而肺动脉血压增高的老鼠的肺动脉切片图

缺氧的时间列于首行。试样在无载荷情形下固定。转载自冯元桢和刘树谦(1991)。

图 13.7 显示了此重建过程是多么的迅速。在图中，每一行表示肺动脉血管段所处的不同位置。在最上方第一张照片表示 3 月龄老鼠动脉壁的横截面，试样在无载荷情况下固定。在图中，复盖在血管内腔的表面的内皮细胞层因为非常薄(仅有几个微米)，是看不清的。在图的下端标出了 100μm 的长度。看见的深色线条是弹性纤维。在血管壁内层(上半部)染色后颜色较深的是中膜层，下部颜色较浅的是外膜层。第一行的第二张照片表示在缺氧舱中停留 2 小时后肺主动脉的横截面图。在内皮层和中膜层中可以看到明显的小液体囊泡和某些液体聚积。此时也可以发现在血管壁上弹性纤维染色的某些生物化学改变。第三张照片表示 12 小时后的管壁结构，此时中膜层增厚，外膜层没有太多变化。第四张照片表

示缺氧 96 小时后的情况，外膜层厚度增至与中膜层一样厚。随后的两张分别表示在缺氧 10 天和 30 天后老鼠肺动脉壁组织的照片。在此时期的主要变化是外膜层继续增厚。

第二行的照片显示较小的肺动脉壁的相应的变化。第三、四行所示的血管的直径更细。第四行的血管的内径约为 100μm，已是微动脉的尺寸。从所有尺寸的肺动脉图片观察，血管壁的重建是明显的，最大变化率发生在 1—2 天。

13.6 力学特性的重建

当血管材料由于重建而变化时，它的力学特性也发生变化。生物软组织材料的力学特性可以用 9.5 和 9.7 节的本构方程来描述。因此，我们可预见本构方程或者至少它们的系数将随着组织的重建而改变。我们将用实例来说明这一情况。

血管的力学特性，可用 9.4 和 9.5 节所提出的拟弹性本构方程的公式来表达。我们假定拟弹性应变能函数存在，用符号 $\rho_0 W$ 表示，该函数是九个应变分量 E_{ij}($i=1,2,3$ 和 $j=1,2,3$)的函数，且对 E_{ij}和 E_{ji}是对称的。由此，则应力分量可以从 $\rho_0 W$ 的偏微分得到，即

$$S_{ij}=\frac{\partial \rho_0 W}{\partial E_{ij}} \tag{13.6-1}$$

此式中，ρ_0 是材料在零应力状态时的密度，W 是单位质量的应变能，$\rho_0 W$ 是单位体积的应变能，E_{ij}是应变。这应变是相对于零应力状态测量的。

对测定 $\rho_0 W$ 的方法，有两种看法。其一是将血管壁看成是不可压缩的材料，而在三维空间推导 $\rho_0 W$ 函数(锺正仁和冯元桢 1983)，其二是限定血管是一轴对称的圆柱体，受轴对称的载荷，作轴对称的变形，故其应变张量只有周向应变 E_{11}和轴向应变 E_{22}两个分量需要考虑，径向应变可根据不可压缩的条件计算出来。因此，我们可用二维的看法来处理。

用二维的看法来分析动脉血管的应变能 $\rho_0 W$ 的已有多人。Patel 和 Vaishnav(1972)提出了多项式形式的应变能。Hayashi 等(1971)提出了对数式，冯元桢等(1973、1979、1981)提出了指数形式，可参考第 9 章末的参考文献。冯元桢等(1979)的应变能函数是

$$\rho_0 W = C\exp(a_1 E_{11}^2 + a_2 E_{22}^2 + 2a_4 E_{11} E_{22}) \quad (13.6\text{-}2)$$

式中 C、a_1、a_2 和 a_4 是材料常数，E_{11}是周向应变，E_{22}是轴向应变，这两个应变都是从零应力状态开始测量的，以刘树谦与冯元桢所作的老鼠发生糖尿病时的血管特性变化为例，他们用老鼠进行了对照实验，注射 Streptozocin 后引发糖尿病，然后按时测定其血管的力学特性，将结果用(13.6-2)式来处理，将血管壁当成均匀的材料，得到的各材料常数列于表 13.1 中。

表 13.1 糖尿病 20 天后和正常老鼠胸主动脉的应力—应变关系的系数 C、a_1、a_2 和 a_4

其中 a_4 是根据正常老鼠取均值而定的。假定 a_4 不因糖尿病而变*

组数	$C 1n \cdot cm^{-2}$	a_1	a_2	a_4
正常鼠平均值±SD	12.21±3.32	1.04±0.35	2.69±0.95	0.0036
20 天糖尿病鼠平均值±SD	15.32±9.22	1.53±0.92	3.44±1.07	0.0036

* 根据刘树谦和冯元桢(1992)。

自表中即可见材料常数随糖尿病病情的发展而变化。

13.7 考虑零应力状态的应力分析

假如一个固体的零应力状态已知，其应变为无限小量，其本构方程是线性的，那么叠加原理就可以使用。假如这个固体有残余应力，又受外力，则它的应力分析在数学上是下面两个线性问题的简单叠加：即先找出在无外力作用下的残余应力，再找出在无残余应力的情形下受外加载荷时的应力。属于此一范畴的重要的经典理论有位错理论(theory of dislocation)和热应力学。

假如应变是有限的，或本构方程是非线性的，那末数字问题是非线性的。叠加原理不能用，所以具有残余应力的固体的应力分析应成为一个特殊的问题了。非线性分析通常是很困难的，但如果知道零应力状态及其与当前状态的关系，则此时应力的分析也可能相当简单。

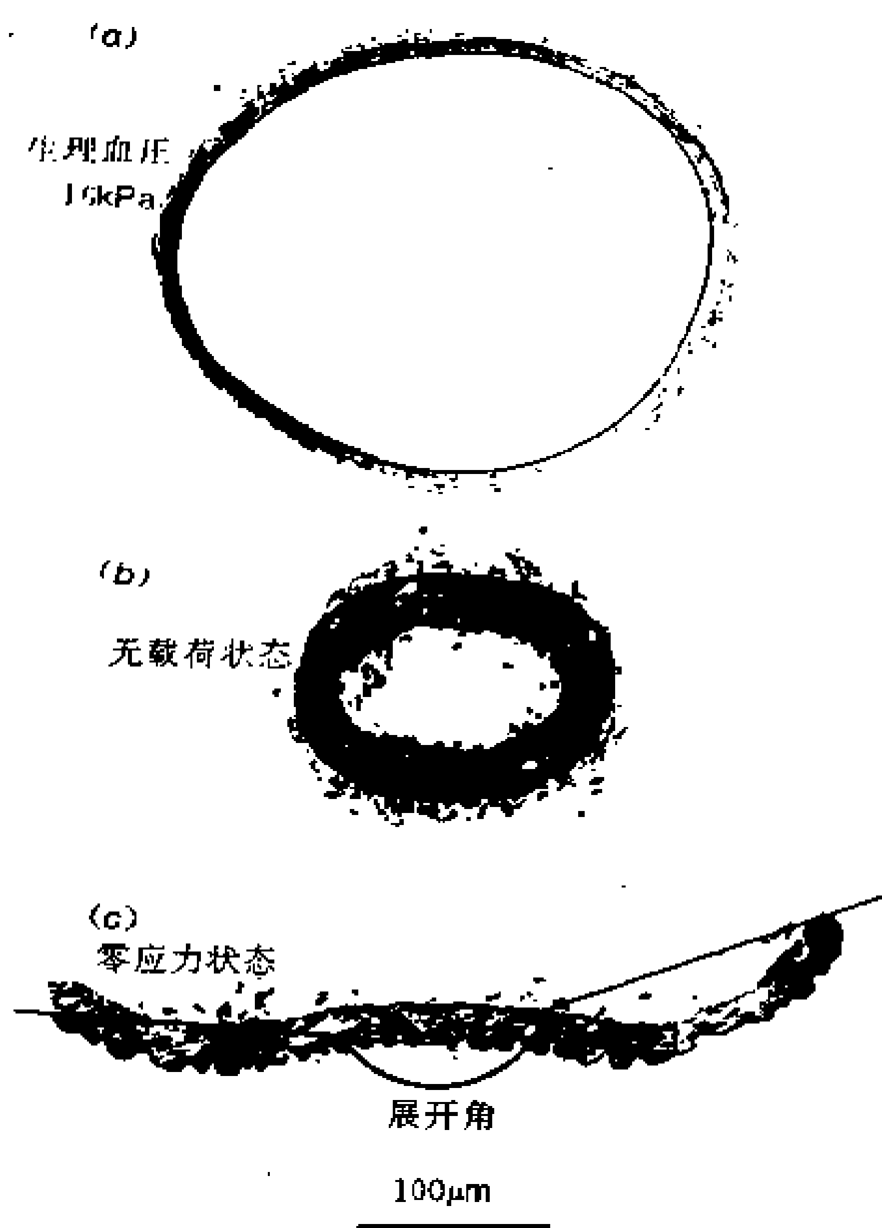


图 13.8 老鼠回肠动脉的形状

a—表示正常血压时的形状；b—为无载荷时的形状，c—为零应力状态时的形状

例如，考虑一回肠动脉，当血压为 16kPa(120mmHg)时，无载荷作用时和零应力状态下的横截面形状如图 13.8 所示。从图中我们可以测量血管内壁的周长。对应于零应力状态，无载荷状态和“内环境稳定”的在体状态(正常在体状态)三个情形下的周长。分

别用 $L^{i\theta}_{o\text{-}stress}$、$L^{i\theta}_{no\text{-}load}$和 $L^{i\theta}_{hom}$三个量来表示。这三个符号的上标 i 表示"内"，θ 表示周边，下标"*o-stress*"、"*no-load*"和"*hom*"分别表示零应力状态、无载荷状态和在体状态。同理，我们可以测量外周边长，得到 $L^{o\theta}_{o\text{-}stress}$、$L^{o\theta}_{no\text{-}load}$和 $L^{o\theta}_{hom}$，上标"0"表示"外"。由此可得到内壁相对于零应力状态的伸长率，在无载荷状态及在体状态分别为

$$\lambda^{(i\theta)}_{no\text{-}load} = \frac{L^{(i\theta)}_{no\text{-}load}}{L^{(i\theta)}_{o\text{-}stress}},\lambda^{(i\theta)}_{hom} = \frac{L^{(i\theta)}_{hom}}{L^{(i\theta)}_{o\text{-}stress}}. \tag{13.7-1}$$

而外壁相对于无应力状态的伸长率在此二状态则分别为

$$\lambda^{(0\theta)}_{no\text{-}load} = \frac{L^{(0\theta)}_{no-load}}{L^{(0\theta)}_{o\text{-}stress}},\lambda^{(0\theta)}_{hom} = \frac{L^{(0\theta)}_{hom}}{L^{(0\theta)}_{o\text{-}stress}} \tag{13.7-2}$$

表 13.2 给出了回肠动脉、内侧足底动脉和肺动脉（1 级分支）周长的典型原始数据。计算出的伸长率也列在表中。这些数据可与在另一假设下所得到的理论计算值相比较。这个假设是该血管的残余应变为零，故其张开角为零，因而其零应力状态时的形状与无载荷时的形状相同。在此假设下，血管在无载荷时的伸长率是一。正常在体的血管内外壁的伸长率则为

$$\lambda^{(i\theta)}_{hom} = \frac{L^{(i\theta)}_{hom}}{L^{(i\theta)}_{no\text{-}load}},\lambda^{(0\theta)}_{hom} = \frac{L^{(0\theta)}_{hom}}{L^{(0\theta)}_{no\text{-}load}}. \tag{13.7-3}$$

这些值列在表 13.2 最后两列。

表 13.2　在零应力、在无载荷、在 10.666kPa 血压和在 16kPa 血压状态下测量所得到的老鼠回肠动脉内壁和外壁的周向长度，并相对于零应力状态和无载荷状态计算出的周向伸长率

状态	长度/μm		周向伸长率			
			对零应力状态		对无载荷状态	
	内壁	外壁	内壁	外壁	内壁	外壁
零应力	743	963				
无载荷	590	1091	0.79	1.13	1.0	1.0
10.666kPa	1017	1281	1.37	1.33	1.72	1.17
16kPa	1023	1286	1.38	1.34	1.73	1.18

回肠动脉(1 级分支),在无载荷的条件下,血管壁的周向残余伸长率的分布如图 13.9(a)所示。从图中可以看出,在血管内壁处的血管残余伸长率是压缩的,在外壁为受拉的。按照平面截面在弯曲时仍为平面截面的通常假定,血管壁沿壁厚方向伸长率的分布是一条直线(图中用粗线表示)。在图 13.9(b)中,粗线几乎为一水平线,表示当血压为 10.666kPa 时,在血管壁中实际周向伸长率的分布差不多是均匀的。应变是正(受拉)而均匀。细斜线表示在血压为 10.666kPa,假定张开角为零时的周向伸长率的分布,是很不均匀的,相应的应变也不均匀。可见忽略残余应变(张开角)带来的误差是显而易见地较大的。当血压为 16kPa 时,相应的伸长率分布如图 13.9(c)所示。从此图可知,由于忽略残余应变而带来的误差是非常大的。所以了解血管壁的零应力状态是非常重要的。

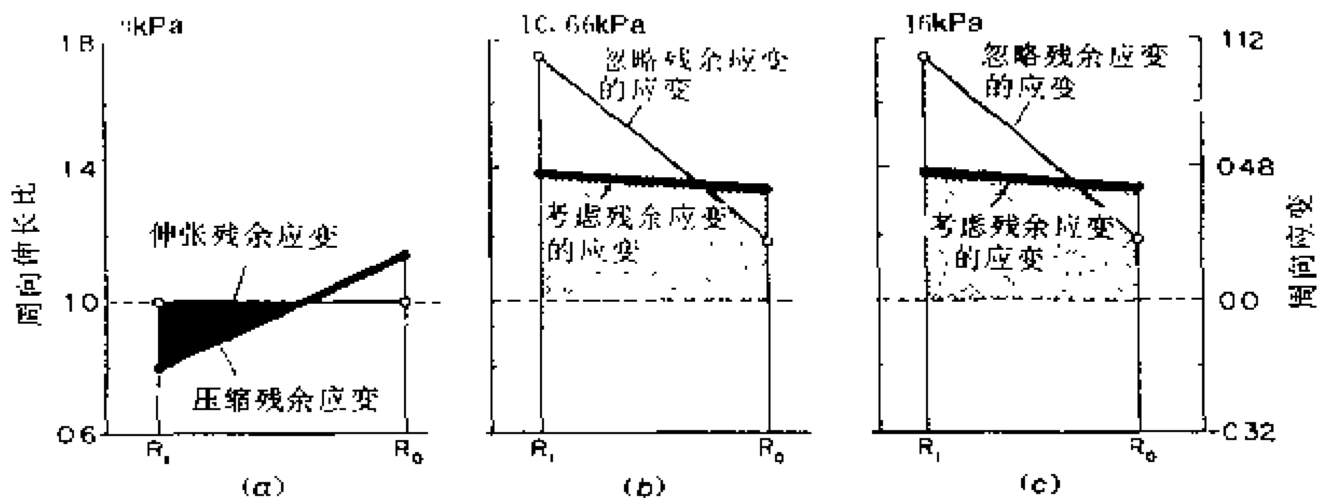


图 13.9 回肠动脉血管(1 级分支)周向伸长率分布图,其数值大小列在表 13.2 中

(a)在无载荷状态测得的残余伸长率。残余应变可在右边非线性标尺上读出。R_i 和 R_o 分别为血管的内、外径,应变在内壁区域是受压缩,在外壁区域为拉伸。(b)连接两实心点几乎呈水平的粗线表示在 10.666kPa 血压下(相对于零应力状态)测得的伸长率,连接两空心点的细斜线为忽略张开角而计算出的假定伸长率。(c)在血压为 16kPa 时对应的应变。这些图线表明,假如忽略残余应变会产生很大的误差;引自冯元桢和刘树谦(1992)

回肠动脉从无载荷到正常在体情形间,实测得到的轴向伸长率为 1.35。在无载荷和零应力状态下,对切开的血管段实验测得

其轴向长度无变化，所以从零应力状态到正常在体状态，回肠动脉的轴向伸长率也大约为 1.35。最后，径向伸长率可根据血管壁不可压缩条件：

$$\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1 \qquad (13.7\text{-}4)$$

计算出来，这样血管的应变状态完全可以由实验测定。

对于动脉，应力是随应变的指数函数递增的。因此，如果按图 13.9 中画出的应变分布图来求其相应的应力分布图，则将显示因忽略张开角而会带来的巨大的应力误差。

13.8 应力与生长的关系

生物组织生长受多种因素影响：营养、生长因子(酶的一种)、物理和化学环境、疾病以及应力和应变。如果其他条件都相同，则应力一生长规律将会显露出来。

应力和生长的关系在研究疾病、治疗和康复等方面已在临床得到应用。若已知某器官的应力与生长的规律，则外科医生就可以利用它来制定该器官的手术方案。工程师就可将它用于组织工程、制造假肢及人工脏器时得到指导，理疗专家、运动员和教育工作者，将更了解运动与健身的关系。

组织工程是从事生产活组织的人工替代品的工程。它是建立在分子生物学、细胞生物学和器官生理学的基础之上的一门技术产业。要掌握好组织工程，就必须了解健康组织的保持、改进或恶化与应力和应变的关系。

一般来讲，机器是不会自己重建的，但在某些情况下，人们显然希望机器有自己重建的能力。工程师显然能设想机器如何能够自我重建。但是，对工程界来说这是一个全新的领域。

习　题 13

13.1　活细胞中的膜。在细胞中，膜是普遍存在的，但它们的力学特性完全不

了解。从理论分析，细胞膜可以认为具有表面张力、拉伸弹性，剪切弹性和弯曲刚度。张力和剪切与膜面积和变形有关；弯曲刚度与膜表面曲率的变化有关。

在三维欧几里德空间，表面上任意点具有两个主曲率。这两个主曲率之和叫表面的平均曲率，这两曲率的积叫高斯曲率。可以假定，膜的能态与平均曲率和高斯曲率有关。现请提出细胞膜的应变能函数，并解一数学问题：求平均曲率处处不为零的有限面积的最小表面。

Reinhard Lipowsky 在 Nature 349 卷、478 页 1991.2 给出了一种答案如图 P13.1 所示。你认为 Lipowsky 表面是最小的吗？这表面具有哪种能态？如果你想断言最小表面面积具有最低能量水平，那么细胞膜的能量怎样与表面积、平均曲率和高斯曲率联系起来？哪种表面处处具有零高斯曲率？一可展曲面是否是零高斯曲率面？所有具有零高斯曲率表面都可展吗？

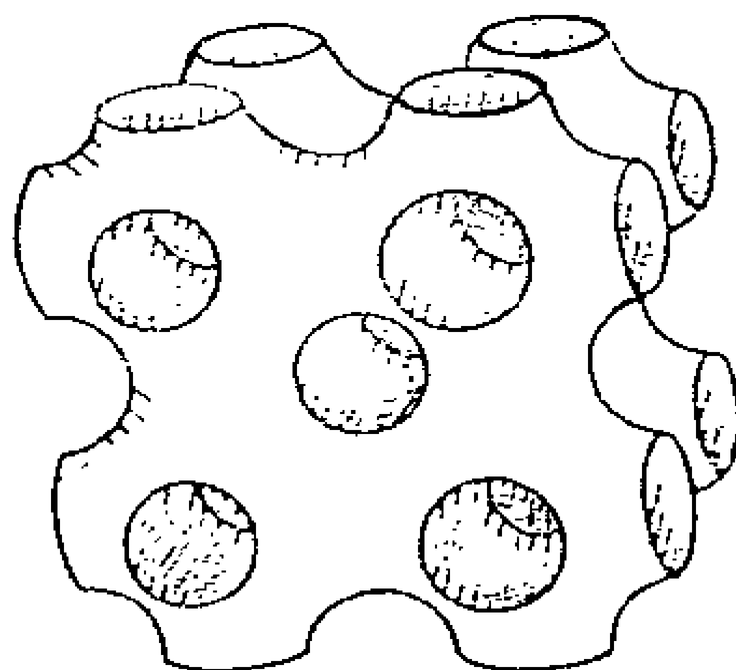


图 *P*13.1　Lipowsky 表面

附录

Brief Biography of Y. C. Fung

Yuan-Cheng Bertram Fung received his BS and MS in 1941 and 1943 from The National Central University, China, and his Ph. D. from the California Institute of Techology, Pasadena, California, in 1948.

Among his early contributions were the development of theories of dynamics and stability of elastic structures in fluid stream. His work is recorded in his book "*Introduction to the Theory of Aeroelasticity*" (1956, 1969). He published also a treatise entitled "*Foundation of Solid Mechanics*" (1965), and a textbook entitled "*A First Course in Continuum Mechanics*" (1969, 1976).

Since 1960, Dr. Fung has developed the mechanics of living organs. He has studied circulation, blood vessels, blood cells, heart, lung, and the relationship between growth and physical stress. His ambition is to demonstrate a rational approach to physiology. In order to demonstrate this approach, he wrote three books: *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues* (1981), *Biodynamics: Circulation* (1984), *and Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth* (1990).

Dr. Fung was given the Eugene Landis Award by the Micro-

circulatory Society(1975), the Theodore Von Karman Medal by the American Society of Civil Engineers (1976), the Lissner Award by the American Society of Mechanical Engineers(1978), the Worcester Warner Medal for Outstanding Contribution to the Permanent Literature(1984), and the Timoshenko Medal(1991) by the American Society of Mechanical Engineers. He is a Guggenheim Fellow, Fellow of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Fellow of the American Society of Mechanical Engineers, member of the U. S. National Academy of Engineering, Senior Member of the Institute of Medicine of the National Academy of Science, and Honorary Professor of five Universities in China. He is author of 270 papers published in professional journals.

YUAN-CHENG B. FUNG

Honors:

1965	Achievement Award, Chinese Institutes of Engineers
1966—	Member, Academia Sinica
1968	Distinguished Achievement Award, Chinese Association of Scientists, and Engineers of California.
1969	Fellow, AIAA
1975	Eugene Landis Award, Microcirculatory Society
1976	General Lecturer, 14th Congress of Iutam (International Union of Theoretical and Appiled Mechanics), Delft
1976	Theodore von Karman Medal. American Society of Civil Engineers
1977	Otto Laport Lecturer. American Physical Society, Fluid Dynamics Division
1978	Lissner Award for Bioengineering, American Society of Mechanical Engineers
1978	Chairman, Third International Congress of Biorheology
1979	Honorary Professor, Chongqing University, Chongqing, China
1979	Honorary Professor, Huachung Institute of Technolo-

	gy, Wuhan, China
1979	Member, National Academy of Engineering
1979	Chairman, Second World Congress of Microcirculation
1979	Fellow, ASME
1981	Centennial Medal of ASME
1982—	Permanent Honorary Chairman, U. S. National Committee on Biomechanics
1983	Chairman, The First China-Japan-USA Conference on Biomechanics, Wuhan, China
1983	Honorary Professor, Jiangsu Institute of Chemical Engineering, China
1983—1984	President, American Academy of Mechanics
1984	Worcester Reed Warner Medal and Award, ASME
1985	Karakash Distinguished Lecturer, Lehigh University, Pennsylvania
1986	Poiseuille Medal, International Society of Biorheology
1986	Honorary Member, Chinese Academy of Science, Institute of Mechanics, Beijing
1986	Chairman, Committee on Bioengineering, National Academy of Engineering. Initiated tbe new Division of Bioengineering
1986	Honorary Professor, Chinese Institute of Military Medical Research and Military Postgraduate Medical School
1986	Engineer of the Year Award. San Diego Engineering Society
1986	Establishment of" Y. C. Fung Young Investigator Award" by the American Society of Mechanical Engineers



1987	Honorary Professor, Xian Jiaotung University, Xian, China
1987	University of California, San Diego. Excellence in Research Award.
1986—1990	Chairman of the Steering Committee, First World Congress of Biomechanics
1988	Honorary Professor; Beijing University of Aero and Astronautics, China
1989	ALZA Award, Biomedical Engineering Society
1990	Chairman, World Committee for Biomechanics
1991	Senior Member, Institute of Medicine of the National Academy of Science
1991	Timoshenko Medal, American Society of Mechanical Engineers.
1992	Member, United States National Academy of Science
1992	Fellow, American Institute of Medical and Biological Engineering
1992	Borelli Award, and Borelli Lecturer. American Society of Biomechanics

Curriculum VitaeYuan-Cheng B. Fung

University of California,
San Diego, M-005
La Jolla, CA 92093
(619) 534-4278

2660 Greentree Lane
La Jolla, CA 92037
(619) 453-0086

Birthdate: September 15, 1919 Yuhong, Wutzin, Jiangsu, China

Degree:			
	B. S.	1941	Central University, China, Aeronautics
	M. S.	1943	Central University, China, Aeronautics
	Ph. D.	1948	California Institute of Technology

(Summa Cum Laude) Aeronautics and Mathematics

Academic Posts:

1942—1943 Instructor, Ta-Kung Technical School, Shapingpa

1943—1945 Research Fellow, Bureau of Aeronautical Research, China

1945—1948 Assistant in Aeronautics, California Institute of Technology

1948—1951 Research Fellow in Aeronautics, California Institute of Technology

1951—1955 Assistant Professor of Aeronautics, California Institute of Technology

1955—1959 Associate Professor of Aeronautics, California Institute of Technology

1959—1966 Professor of Aeronautics, California Institute of Technology

1966— Professor of Bioengineering and Applied Mechanics, University of California, San Diego

Industrial Experience:

1943—1945 Bureau of Aeronautical Research, China

1952—1954 Consultant, Aerocon, Inc.

1957—1969 Consultant, Ramo-Wooldridge Corp., Space Technology Laboratories, TRW Systems

1957 Consultant, Lockheed Aircraft

1958—1962 Consultant, Boeing Aircraft Co.

1960 Consultant, Douglas Aircraft

1962 Consultant, Aerospace Corp.

1963 Consultant, North American Aviation

1980— Consultant, Jaycor

Professional Society Memberships and Offices:

American Academy of Mechanics, 1969 -. President, 1983. Fel-

low, 1976 -.

American Institute of Aeronautics and Astronautics, Member, 1948 -. Fellow, 1969 -.

American Society of Mechanical Engineers, Memher, 1965 -. Fellow, 1978 -. Chairman: Applied Mechanics Division, 1976-1977, Executive Committee, 1970—1977.

American Association for Advancement of Science, 1966—1975.

American Physiological Society, Member, 1968 -. Council on Circulation, 1968 -. Fellow, Cardiovascular Section, 1972 -.

Microcirculatory Society, Member, 1966 -. Council, 1969—1974.

Biophysical Society, 1966—1975.

In ternational Society of Biorheology, Member, 1967 -. Vice President, 1974—1983. Editor, 1972 -.

Society of Biomedical Engineering, Member, 1968 -. Council, 1972—1976. Associate Editor, 1972—1979. President, 1982—1983.

American Heart Association, Member, 1967—. Council on Basic Science, 1968—.

U. S. National Committee for Biomechanics, Chairman, 1980. Honorary Chairman, 1981—.

Publications

Numerous technical papers in professional journals.

Author of books: Theory of Aeroelasticity, Wiley, 1955, Revised, Dover, 1969.

Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, 1965.

A First Course in Continuum Mechanics, Prentice-Hall, 1969 (1st Ed) 1977 (2nd Ed)

Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues, Springerverlag, 1981.

Biodynamics: Circulation, Springer-Verlag, 1984.

Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth, Springer-Verlag, 1990.

Editor of books: Biomechanics, Prentice-Hall, 1972

Thin Shell Structures, Prentice-Hall, 1973.

Biomechanics in China, Japan, and USA. Science Press, *Beijing*, 1984.

Progress and New Directions of Biomechanics. Mita Press, Tokyo, 1989.

Editor of monographs: Biomechanics (ASME), 1966. Biomechanics (ASME), 1973.

Contribution to books: Encyclopedia in Engineering Science

Handbook of Engineering Mechanics

Urodynamics

Microcirculation

Peripheral Circulation

Editorship:

Technical Editor Journal of Biomechanical Engineering (ASME), 1978—1983

Associate Editor Journal of Biomechanical Engineering (ASME), 1977—1979

Editor Biorheology Journal, (Pergamon Press) 1972—1988

Associate Editor International Journal of Solid and Structures (Pergamon Press), 1967—1989

Associate Editor Journal of Applied Mechanics (ASME), 1966—1974

Associate Editor Applied Mechanics Reviews (ASME), 1967—1979

Associate Editor Journal of Biomechanics (Pergamon Press), 1969—1982

Associate Editor Advances in Applied Mechanics (Academic Press), 1971-

Associate Editor Journal of Bioengineering (Pergamon Press), 1976—1979

Associate Editor Annals of Biomedical Engineering (Academic Press), 1972—1979

Associate Editor Microvascular Research (Academic Press), 1966—1971, 1978—

Plenary Lectures:

1976 International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Delft, Holland.

1980 Society of Engineering Science, Atlanta, Georgia.

1981 Canadian Congress of Applied Mechanics, Moncton.

1981 First National Congress of Biomechanics, People's Republic of China.

1981 Fourth International Congress of Biorheology, Tokyo, Japan.

1982 Third European Congress of Biomechanics, Nijmegen, The Netherlands.

1983 First China-Japan-USA Conference on Biomechanics, Wuhan, People's Republic of China.

1984 Witzig Lecture, Cardiovascular System Dynamics Society Meeting on Nov. 7, 1984, in University Pennsylvania, Philadelphia, P. A.

1984 International Congress of Biomechanics, July 10, Buffalo, N. Y.

1985 General Lecture, Joint ASME ASCE Mtg. on Applied Mechanics, Biomechanics and Fluids Engineering, June

26,1985,Albuquerque,N. M.

1985 General Lecture, Am. Society of Biomechanics, Oct. 2, 1985, Ann Arbor, Michigan.

1985 Thurston Lecture, ASME, Nov. 19, 1985, Miami Beach, Florida.

1986 Faculty Distinguished Lecture, Feb. 20, 1985, UCSD School of Medicine.

1987 International Conference on Fluid Mechanics, July 1—4, 1987, Beijing, China.

1990 Keynote speech: 10th Anniversary Meeting of the Chinese Society of Biomedical Engineering, Beijing, Dec. 1—4, 1990.

1990 Plenary Speaker: 6th International Conference on Biomedical Engineering. Singapore, Dec. 6—8, 1990.

1991 Plenary Lecture on "The Future of Biomechanics". Japan Soc. Mech. Eng. Osaka, Jan. 29—31, 1991.

1992 Borelli Lecture. The Second North American Congress of Biomechanics Joint American and Canadian Societies of Biomechanics, Aug. 24—28, 1992.

<u>Books, single authored</u>

1. Fung, Y. C.: <u>An Introduction to the Theory of Aeroelasticity.</u> John Wiley and Sons, New York, 1955. Revised, Dover Publications, 1969. Reissued, 1993

   <u>Russian:</u> <u>Vbedenie v Teorie Aerouprugosti</u>, translated by Smirnov and Grigoluk, Gosudarstvennoe Izdatelstro Physico-mathematical Literaute, Moscow, 1959.

   <u>Chinese:</u>冯元桢著,冯钟越,管德译《空气弹性力学引论》,北京国防工业出版社,1963。 translated by Prof. Fung Chung-Yue and Kuang De. Chinese Defence Industry Publishers, 1963.

2. Fung, Y. C. : Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall, New Jersey, 1965.
Japanese: 固体の力学理论, Y. C. フアニ著, 大桥義夫, 村上澄男, 神谷纪生识, 培风馆
translated by Professors Y. Ohashi, S. Murakumi and N. Kamiya, 1968.
Chinese: 欧阳岂, 马文华, 王开福译《固体力学基础》上海科学出版社. translated by Professors Ouyang Chang, Ma Wen-Hua, Wang Kei-Fu. Shanghai Science Press, 1982
Polish: Podstawy Mechaniki Ciata Statego, translated by Andrzej Jaworski, Warszawa, Panstowowe Wydawnictwo Naukow, 1969.
3. Fung, Y. C. : A First Course in Continuum Mechanics. Prentice-Hall, New Jersey, lst edition, 1969, 2nd edition, 1977. 3rd edition, 1993.
Japanese: 连续体の力学入门。大桥義夫, 村上澄男, 神谷纪生识, 培风馆
translated by Professor Yoshio Ohaski, Nagoya University.
Chinese: 冯元桢著, 李松年, 马和中译, 王德荣校, 《连续介质力学导论》。北京科学出版社
translated by Professors Li Sung-Nien and Ma Ho-Chung. Edited by Wang De-Yung. Science Press, Beijing, 1984.
4. Fung, Y. C. : Supplementary Notes and Problem Solutions. To Y. C. Fung's "A First Course in Continuum Mechanics." Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
5. Fung, Y. C. : Selected Essays on Bioengineering. (in Chinese), Chongqing University Press, 1979. 冯元桢著, 《生物工程论文选》, 重庆大学生物力学研究室译编, 科学出

版社

6. Fung, Y. C. ; Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1981. 2nd edition 1993. Chinese translation: 冯元桢著、戴克刚译《生物力学:活组织的力学特性》。湖南科学技术出版社, 1987。
7. Fung, Y. C. ; Biodynamics: Circulation. Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin/Tokyo, 1984.
Chinese translation: 冯元桢著, 戴克刚译。《生物动力学: 血液循环》, 湖南科学技术出版社, 1987。
8. Fung, Y. C. : Biomechanics. (in Chinese), Science Press, Beijing, 1983. 冯元桢著, 生物力学. 科学出版社, 北京, 1983。
9. Fung, Y. C. : Biomechanics: Motion, Flow, Stress and Growth. Springer-Verlag, New York, 1990.
Chinese translation: 冯元桢著, 邓善熙译,《生物力学—运动、流动、应力和生长》, 四川教育出版社, 1993。

Books, Edited

1. Fung, Y. C. (editor): Biomechanics. Proceedings of a Symposium at ASME 1966 Winter Annual Meeting, Nov. 28—Dec. 1, 1966, New York.
2. Fung, Y. C., Perrone, N., Anliker, M. (editors): Biomechanics: Its Foundations and Objectives. Prentice-Hall, New Jersey, 1972.
3. Fung, Y. C., Sechler, E. E. (editors): Thin Shell Structures: Theory Experiment and Design. Prentice-Hall, New Jersey, 1973.
4. Fung, Y. C., Brighton, J. A. (editors): 1973 Biomechanics Symposium. Properties of Biological Fluids and Solids; Mechanics of Tissues and Organs, ASME, 1973.
5. Fung, Y. C., Fukada, E., Wang, J. J. (editors): Biomechanics

in China, Japan, and USA. Proceedings of an International Conference held in Wuhan, People's Republic of China, May 1983. Science Press, Beijing, People's Republic of China, 1984.

6. Fung, Y. C., Hayashi, K., Seguchi, Y. (editors): Progress and New Directions of Biomechanics. Proc. of the 2nd Japan-USA-China Conference held in Osaka on Sept. 28 —Oct. 2, 1987. Mita Press, Tokyo, Japan, 1989.

1949

1. Fung, Y. C.: Theoretical and experimental effect of sweep upon the stress and deflection distribution in aircraft wings of high solidity. Part 1 — Elastostatic and aeroelastic problems relating to thin wings of highspeed airplanes. AF Tech. Rept. No. 5761, Part 1, 128 pp., Feb. 1949. Air Material Command Wright — Patterson. GALCIT California Institute of Technology. This is part of my Ph. D. Thesis, June, 1948.

1950

2. Fung, Y. C.: Theoretical and experimental effect of sweep upon the stress and deflection distribution in aircraft wings of high solidity. Stress and deflection analysis of swept plates. AF Tech. Rept. No. 5761, Part 2, 115 pp., Air Material Command Wright — Patterson. GALCIT. California Institute of Technology, February, 1950.

3. Fung, Y. C.: Theoretical and experimental effect of sweep upon the stress and deflection distribution in aircraft wings of high solidity. On the stresses and deflections of swept thick-walled box beams. AF Tech. Rept. No. 5761, Part 12, 110 pp., Air Material Command Wright-Patterson, GALCIT. California Institute of Technology, September, 1950.

4. Fung, Y. C. ; Theoretical and experimental effect of sweep upon the stress and deflection distribution in aircraft wings of high solidity. On the stresses in cantilever plates of arbitrary planform and variable thickness (a relaxation procedure with applications to the swept wing problem). AF Tech. Rept. No. 5761, Part 9, 127 pp. , Air Material Command Wright-Patternson. GALCIT. California Institute of Technology, October, 1950.
5. Sechler, E. E. , Williams, M. L. , Fung, Y. C. ; An initial approach to the overall structural problems of swept wings with static loads. J. Aeronaut. Sci. , 17 ; 639-646, 1950.

1952

6. Fung, Y. C. , Kaplan, A. ; Buckling of low arches or curved beams of small curvature. NACA Tech. Note 2840, 75 pp. , November, 1952.

1953

7. Sechler, E. E. , Williams, M. L. , Fung, Y. C. ; Theoretical and experimental effect of sweep upon the stress and deflection distribution in aircraft wings of high solidity. Summary report containing design principles for the static analysis of swept wing structures. AF Tech. Rept. No. 5761, Part 18, 159 pp. , Air Material Command Wright-Patterson. GALCIT. California Institute of Technology, January, 1953.
8. Fung, Y. C. ; Statistical aspects of dynamic loads. J. Aeronaut. Sci. , 20 ; 317—330, 1953.
9. Fung, Y. C. ; Bending of thin elastic plates of variable thickness. J. Aeronaut. Sci. , 20 ; 455—468, 1953.
10. Fung, Y. C. ; On the behavior of a sharp leading edge. J. Aeronaut. Sci. , 20 ; 644, 1953.

1954

11. Fung, Y. C. :On the statistical approach to the analysis of dynamic stresses in aircraft structures during landing. Final Rept. No. 2 on BuAer Contract No. NOas 53-348-c, 55 pp., Aercon. Inc., California, February, 1954.
12. Fung, Y. C. :Stability, distrubed motion, and loads of a seaplane planing over ocean waves. Final Rept. No. 3 on BuAer Contract No. NOas 53-348-c, 77 pp., Aeron Inc., California, March, 1954.
13. Fung, Y. C. :Summary and recommendations for further research on a new approach to aircraft ground loads problems. Final Rept. No. 4 on BuAer Contract No. NOas 53-348-c, 18 pp., Aercon Inc., California, April, 1954.
14. Kaplan, A., Fung, Y. C. : A nonlinear theory of bending and buckling of thin elastic shallow spherical shells. NACA Tech. Note 3212, 58 pp., August, 1954.
15. Fung, Y. C. : The static stability of a two-dimensional curved panel in a supersonic flow, with an application to panel flutter. J. Aeronaut. Sci., 21:556-565, 1954.
16. Fung, Y. C., Wittrick, W. H. ; The anticlastic curvature of a strip with lateral thickness variation. J. Appl. Mech., 21: 351-358, 1954.

1955

17. Fung, Y. C., Wittrick, W. H. ; A boundary layer phenomenon in the large deflection of thin plates. Quart. J. Mech. Appl. and Math., 8: Part 2, 191-210, 1955.
18. Fung, Y. C. :The flutter of a buckled plate in a supersonic flow. Tech. Rept. No. OSR-TN-55-237, 32 pp., GALCIT, California Institute of Technology, July 1955.
19. Fung, Y. C. : The analysis of dynamic stresses in aircraft structures during landing as nonstationary random pro-

cesses. J. Appl. Mech. ,22:449-457,1955.

1956

20. Fung, Y. C. , Kaplan, A. , Sechler, E. E. ; Experiments on the supersonic flutter of thin cylinders under internal pressure. Tech. Rept. No. AM 6-3,Space Tech. Lab, 1956.

1957

21. Fung, Y. C. ; Flutter of curved plates with edge compression in a supersonic flow. Proceedings on Third Midwestern Conf. on Solid Mechanics, 221-245. Ann Arbor, Michigan. University of Michigan Press, 1957.

22. Fung, Y. C. , Sechler, E. E. ; Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure. J. Aeronaut. Sci. ,24:351-356,1957.

23. Fung, Y. C. ; On the safety of structures against ground shocks. Tech. Rept. No. GM-TR-191, EM 7-6, 16 pp. ,Ramo-Wooldridge Corp. ,1957.

24. Fung, Y. C. ; Some general properties of the dynamic amplification spectra. J. Aeronaut. Sci. ,24:547-548,1957.

25. Fung, Y. C. ,Sechler ,E. E. ,Kaplan,A. ;On the vibration of thin cylindrical shells under internal pressure. J. Aeronaut. Sci. ,24:650-660,1957.

26. Fung, Y. C. ,Miles, J. W. ; Aeroelasticity in Stability and Control. In: Handbook on Aeroelasticity, Wright Air Development Center Tech. Rept. No. 55-173, Chapters II and V. 1957.

1958

27. Fung, Y. C. ; On two-dimensional panel flutter. J. Aeronaut. Sci. ,25:145-160,1958.

28. Fung, Y. C. ,Barton,M. V. ; (a)Some shock spectra characteristics and uses. J. Appl. Mech. ,25:365-372,1958.

(b) Some characteristics and uses of shock spectra. Tech. Rept. No. GM-TR-82, AM 6-14, 50 pp., Ramo-Wooldridge Corp., 1956.

29. Fung, Y. C.: Fluctuating lift and drag acting on a cylinder in a flow at super-critical Reynolds numbers. Shock and Vibration Bulletin, Part 2, 147-170, 1958. More detailed results in (a) Tech. Rept. No. GM-TR-0165-00343, EM 8-5, 45 pp., under same title, Space Tech. Lab., Ramo-Wooldridge Corp., 1958. (b) Tech. Rept. No. GM-TR-0165-00465, EM 8-19, 26 pp., under the title "The fluctuating lift force acting on a cylinder subjected to forced oscillations perpendicular to a flow at high Reynolds numbers". Space Tech. Lab., Ramo-Wooldridge Corp., 1958.

1960

30. Fung, Y. C., Sechler, E. E.: Instability of Thin Elastic Shells. In: Structural Mechanics. (edited by J. N. Goodier and N. J. Hoff), Pergamon Press, 115-168, 1960.

31. Fung, Y. C.: (a) Aeroelasticity. (b) Flutter, Aeronautical. In: McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Engineering. 89-93, 355-356, McGraw-Hill Publishers, 1960, 2nd edition, 1969.

32. Fung, Y. C.: The analysis of wind-induced oscillations of large and tall cylindrical structures. Tech. Rept. No. STL /TR-60-0000-09134, EM10-3, 40 pp., Space Tech. Lab., June 1960.

33. Fung, Y. C.: Shock response of a nonlinear system-a perturbation method for determining loading-ratio characteristics at low frequencies. Tech. Rept. No. STL

/TR-60-0000-19364, EM 10-25, 53 pp., Space Tech. Lab., October, 1960.

34. Fung, Y. C.: Fluctuating lift and drag acting on a cylinder in a flow at super-critical Reynolds numbers. (a) IAS paper No. 60-6. Presented at the IAS 28th Ann. Mtg., New York, NY, January 25-27, 1960. (b) J. Aeronaut. Sci., 27: 801-814, 1960.

35. Fung, Y. C.: Shock loading and response spectra. In: Shock and Structural Response. ASME, 1-17, 1960. Presented at Symp. on Shock and Structural Responses. ASME, November, 1960.

36. Fung, Y. C., Schreiner, R. N.: Tables and charts of the loading ratio of the shock response of a nonlinear system. Tech. Rept. No. STL/TR-0000-19362, EM 10-32, 70 pp., Space Tech. Lab., December, 1960.

1961

37. Fung, Y. C.: Karman Vortex Street. In: Encyclopedic Dictionary of Physics. (editor-in-chief, J. Thewlis), 4: 157-158, 1961.

38. Lock, M. H., Fung, Y. C.: Comparative experimental and theoretical studies of the flutter of flat panels in a low supersonic flow. Tech. Rept. No. AFOSR-TN-670, 81 pp., CALCIT. California Institute of Technology, May, 1961.

39. Fung, Y. C., Schreiner, R. N.: Tables and charts of the shock response of nonlinear systems (II). Tech. Rept. No. EM 11-10, 58 pp., Space Tech. Lab., June 1961.

40. Barton, M. V., Chobotov, V., Fung, Y. C.: A collection of information on shock spectrum of a linear system.

Tech. Rept. No. EM 11-9, 38 pp. , Space Tech. Lab. ,July,1961.

41. Fung,Y.C. ,Barton,M.V. ;The performance and design of nonlinear systems subjected to ground shock. Tech. Rept. No. EM 11-6,38 pp. ,Space Tech. Lab. ,July, 1961.

42. Fung, Y. C. ; Shock spectrum for discontinuous forcing functions. Tech. Rept. No. 6120-0070-RU-000, EM 11-23, 11 pp. ,Space Tech. Lab. ,TRW,December, 1961.

43. Fung, Y. C. ;On the response spectrum of low-frequency mass-spring systems subjected to ground shock. (a) Abbreviated version: J. Aeronaut. Sci. ,29: 100-101, 1962. (b) Full paper: Tech. Rept. No. EM 11-5, 14 pp. ,Space Tech. Lab. ,TRW,April,1961.

1962

44. Fung,Y.C. ,Barton,M.V. ;The performance of nonlinear systems subjected to ground shock. J. Aerospace Engrg. ,21:46-57,1962.

45. Fung,Y.C. ,Young,D. ,Barton,M.V. ;Ground shock response spectra for a mass on a nonlinear spring. Tech. Rept. No. 6120-7210-RU-000, EM 12-1, 48 pp. ,Space Tech. Lab. ,TRW,February,1062.

46. Fung,Y.C. ;On corrugation-stiffened panels. GALCIT SM 62-33, AFOSR 3122, 28 pp. , California Institute of Technology,June,1962.

47. Fung, Y. C. ; Shock response of multidegree-of-freedom systems with nonlinear springs. Tech. Rept. No. 6120-J310-RU-000,EM 12-5,25 pp. ,Space Tech. Lab. ,TRW,August,1962.

48. Fung, Y. C., Barton, M. V.: Shock response of a nonlinear system. (a) Abbreviated version: J. Appl. Mech., Trans. ASME, 29: 465-476, 1962. (b) Full paper: Tech. Rept. No. STLuTR-60-0000-19217, EM 10-22, 43 pp., Space Tech. Lab., October, 1960.
49. Schreiner, R. N., Fung, Y. C.: Tables and charts of the shock response of nonlinear systems (III). Tech. Rept. No. 6120-J359-RU-000, EM 12-15, 47 pp., Space Tech. Lab., TRW, September, 1962.
50. Fung, Y. C., Barton, M. V., Young, D.: Response of nonlinear systems to shock excitation. Presented at S. A. E. National Aerospace Engrg. and Mftg. Meeting, October 8-12, 1962. Paper No. 585C, 7 pp., Soc. of Automotive Engineers, 1962.
51. Stearman, R. O., Lock, M. H., Fung, Y. C.: Ames test on the flutter of cylindrical shells. GALCIT SM 62-37, 59 pp., California Institute of Technology, December, 1962.
52. Anderson, W. J., Fung, Y. C.: The effect of an idealized boundary layer on flutter of cylindrical shells in supersonic flow. GALCIT SM 62-49, 61 pp., California Institute of Technology, December, 1962.
53. Fung, Y. C.: Flutter. In: Handbook of Engineering Mechanics. (edited by W. Flugge), McGraw-Hill Book Company, Chapter 63, 1-14, 1962.
54. Parmerter, R. R., Fung, Y. C.: On the influence of nonsymmetrical modes on the buckling of shallow spherical shells under uniform pressure. NASA Tech. Note D-1510. Collected Papers on Instability of Shell Structures. Natl. Aeronautics and Space Ad-

ministration, Washington, 491-502, 1962.

1963

55. Fung, Y. C.: A summary of the theories and experiments on panel flutter. (a) In: Manual on Aeroelasticity. (edited by W. P. Jones), Pergamon Press, Vol. 3, Part 3, Chapter 7, 1-46, 1963. (b) Tech. Rept. No. AFOSR TN-60-224, 79 pp., GALCIT, California Institute of Technology, May, 1960. Also issued by AGARD and NASA.

56. Fung, Y. C.: Some recent contributions to panel flutter research. AIAA J., 1: 898-909, 1963.

57. Young, D., Barton, M. V., Fung, Y. C.: Shock spectra for nonlinear springmass systems and their applications to design. AIAA J., 1: 1597-1602, 1963.

1964

58. Olson, M. D., Fung, Y. C.: Experiments on the interaction of flutter and buckling of cylindrical shells. Phase I, Static pressure distribution over the thin shell. GALCIT SM 64-39, 18 pp., California Institute of Technology, October, 1964.

59. Fung, Y. C.: Karman vortex street. Aeroelasticity. Flutter. Three articles in Encyclopedic Dictionary of Physics. Pergamon Press, 1964.

1965

60. Barton, M. V., Fung, Y. C.: On the shock response of a small equipment attached to a big structure. Tech. Rept. No. 7120-6224-KU-000, EM 15-6, 13 pp., Space Tech. Lab., TRW, April, 1965.

61. Tong, P., Fung, Y. C.: The effect of wall elasticity and surface tension on the forced oscillations of a liquid in a

cylindrical container. In: Fluid Mechanics and Heat Transfer Under Low Gravity. (edited by H. Cohan, M. Rogers), pp. 11-1 to 11-41, Lockheed Corp., June, 1965.

62. Thomson, W. T., Fung, Y. C.: Instability of spinning space stations due to crew motion. AIAA J., 3: 1082-1087, 1965.

1966

63. Fung, Y. C.: Interaction of mechanical and aeroelastic instabilities of a circular cylindrical shell. In: Dynamic Stability of Structures. (edited by G. Herrmann), Proceedings of an International. Conf. at Northwestern University, Chicago, IL, October 28-20, 1965, Pergamon Press, pp. 267-284, 1966.

64. Olson, M. D., Fung, Y. C.: Supersonic flutter of circular cylindrical shells subjected to internal pressure and axial compression. AIAA J., 4: 858-864, 1966.

65. Fung, Y. C.: Influence of an axial supersonic flow on the buckling of thin cylinders under end compression. Tech. Rept. No. AFOSR 66-1668, 29 pp., GALCIT, California Institute of Technology, July 1966.

66. Fung, Y. C., Zweifach, B. W., Intaglietta, M.: Elastic environment of the capillary bed. Circ. Res., 19: 441-461, 1966.

67. Fung, Y. C.: Research on nonlinear problems in structural dynamics. Tech. Rept. No. AFOSR 66-2724, 16 pp., GALCIT, California Institute of Technology, September 1966.

68. Fung, Y. C.: The constitutive law of the mesentery and its effect on microcirculation. In: Proceedings of the

Ann. (19th)Conf. on Engrg. in Medicine and Biology. (edited by G. G. Vurek), 8: 16, San Francisco, CA, November, 1966.

69. Fung, Y. C.: Microscopic blood vessels in the mesentery. Presented at Symp. on Biomechanics. ASME Ann. Mtg., New York, NY, November 30, 1966. In: Biomechanics, (edited by Y. C. Fung), 151-166, 1966. American Society of Mechanical Engineers, New York.

70. Fung, Y. C.: Theoretical considerations of the elasticity of red cells and small blood vessels. Federation Proceedings 25: 1761-1772, 1966. Federation of American Societies for Experimental Biology.

1967

71. Fung, Y. C.: An Approach to Bioengineering. In: Journeys in Science, (edited by D. L. Arm), AFOSR Science Seminar. Ch. 4, 108-130, University of New Mexico Press, 1967.

72. Olson, M. D., Fung, Y. C.: Comparing theory and experiment for the supersonic flutter of circular cylindrical shells. AIAA J., 5: 1849-1856, 1967.

73. Lee, J. S., Fung, Y. C., Frasher, W. G.: Two-dimensional finite deformation experiments on dog's arteries and veins. (a) Abstract: Proc. Ann. (20th)Conf. on Engrg. in Med. and Biol., 9: 5. 5, Boston, MA, November 13-16, 1967. (b) Full paper: Sci. Rept. No. AFOSR 67-1980, 29 pp., AMES Dept., University of California, San Diego, August, 1967.

74. Fung, Y. C., Sobin, S. S.: A sheet-flow concept of the pulmonary alveolar microcirculation: morphometry and

theoretical results. (Abstract) Proc. Ann. Conf. on Engrg. in Med. and Biol., 9: 9. 7, Boston, MA, November 13-16, 1967.

75. Fung, Y. C. :Elasticity of soft tissues in simple elongation. Am. J. physiol., 213:1532—1544, 1967.

1968

76. Fung, Y. C. : Biomechanics: it's scope, history, and some problems of continuum mechanics in physiology. Appl. Mech. Rev., 21:1-20, 1968.

77. Fung, Y. C., Tong, P. :Theory of the sphering of red blood cells. Biophys. J., 8:175-198, 1968.

78. Fung, Y. C., Sobin, S. S. :Sheet-flow concept of pulmonary alveolar microcirculation:theory. (Abstract) Presented at 52nd Ann. Mtg, Atlantic City, NJ, April 15-20, 1968. Fed. Am. Soc. for Exp. Biol., 578, 1968.

79. Fung, Y. C. :Microcirculation Dynamics. In:Biomedical Sciences Instrumentation. 4:310-320, Plenum Press, Instrument Society of America, 1968.

80. Fung, Y. C., Yih, C. S. :Peristaltic transport. (a) J. Appl. Mech. Trans. ASME, 35: Ser. E, 669-675, 1968. (b) Full paper: Tech. Rept. No. AFOSR 67-2255. 26 pp., AMES Dept., University of California, San Diego, September, 1967.

81. Lew, H. S., Fung, Y. C. :Mathematical analysis of Landis-type experiments on the transport of fluid across the walls of capillary blood vessels. Tech. Rept. No. AFOSR 68-2358, 55 pp., AMES Dept., University of California, San Diego, August, 1968.

1969

82. Lee, J. S., Fung, Y. C. :Experiments on blood flow in lung

alveoli models. ASME 68-WA/BHF-2,December,1-5, 1968.

83. Lee,J. S. ,Frasher,W. G. ,Fung,Y. C. ;Comparison of the elasticity of an artery in vivo and in excision. J. Appl. Physiol. ,25:799-801,1968.

84. Lew,H. S. ,Fung,Y. C. ;On the low-Reynolds-number entry flow into a circular cylindrical tube. J. Biomech. , 2:105-119,1969.

85. Lew,H. S. ,Fung,Y. C. ;Entry flow into blood vessels at arbitrary Reynolds number. J. Biomech. , 3: 23-38, 1970. More complete numerical results are presented in Tech. Rept. No. AFOSR TR-69-0081,On the entry flow in a circular cylindrical tube at arbitrary Reynolds numbers. 34 pp. ,AMES Dept. ,University of California,San Diego,September,1968.

86. Lew, H. S. , Fung, Y. C. ; The motion of the plasma between the red blood cells in the bolus flow. Biorheology, 6: 109-119, 1969. More complete numerical results presented in Tech. Rept. NO. AFOSR 68-2359 under same title,33pp. ,AMES Dept. ,University of California,San Diego,July,1968.

87. Yin,F. C. P. ,Fung,Y. C. ;Peristaltic transport in a circular cylindrical tube. J. Appl. Mech. ,36:579-587,1969.

88. Lee,J. S. ,Fung,Y. C. ; Modeling experiments of a single red blood cell moving in a capillary blood vessel. Microvasc. Res. ,1:221-243,1969.

89. Fung,Y. C. ,Sobin,S. S. ;Theory of sheet flow in the lung alveoli. J. Appl. Physiol. ,26:472-488,1968.

90. Fung,Y. C. ;Studies on the blood flow in the lung. Presented at 2nd Canadian Natl. Congress of Appl. Mech. ,

Waterloo, Canada, May 20-23, 1969. Proc. Canad. Congr., CANCAM, 433-454.

91. Fung, Y. C.: Blood flow in the capillary bed. J. Biomech., 2: 353-373, 1969.

92. Lee, J. S., Fung, Y. C.: Flow in locally constricted tubes at low Reynolds number. J. Appl. Mech., 37: 9-16, 1970.

93. Lee, J. S., Fung, Y. C.: Stokes' flow around a circular cylindrical post confined between two parallel plates. J. Fluid Mech., 37: 657-670, 1969.

94. Lew, H. S., Fung, Y. C.: Flow in an occluded circulary cylindrical tube with permeable wall. Zeit. angew. Math. Physik., 20: 750-766, 1969.

95. Fung, Y. C.: An introduction to bio-fluid mechanics. Dept. of Mechanical Engineering, Monash University, Clayton, Victoria 3165, Australia, August, 1969.

1970

96. Lew, H. S., Fung, Y. C.: Formulation of a statistical equation of motion of a viscous fluid in an anisotropic non-rigid porous solid. Intern. J. Solids and Struct., 6: 1323-1340, 1970.

97. Fung, Y. C.: Mathematical representation of the mechanical properties of the heart muscle. J. Biomech., 3: 381-404, 1970.

98. Lew, H. S., Fung, Y. C.: Plug effect of erythrocytes in capillary hlood vessels. Biophys. J., 10: 80-99, 1970.

99. Sobin, S. S., Tremer, H. M., Fung, Y. C.: Morphometric basis of the sheet-flow concept of the pulmonary alveolar microcirculation in the cat. Circ. Res., 26: 397-414, 1970.

1971

100. Fung, Y. C. : Peristaltic pumping: a bioengineering model. Presented at Symp. on Hydrodynamics of the Upper Urinary Tract. Sponsored by Natl. Res. Council. Chicago, IL, October 25, 1969. In: urodynamics: Hydrodynamics of the Ureter and Renal Pelvis. (edited by S. Boyarsky, C. W. Gottschalk, E. A. Tanagko, P. D. Zimskind), Academic Press, 177-198, 1971.

101. Fung, Y. C. : Biomechanics: A Survey of the Blood Flow Problem. In: Advances in Applied Mechancis. Vol. 11, Academic Press, 65-130, 1971.

102. Tong, P., Fung, Y. C. : Slow viscous flow and its application to biomechanics. J. Appl. Mech., 38: 721-728, 1971.

103. Lew, H. S., Fung, Y. C. : A study on the low Reynolds number flow in a valved vessel. J. Biomech., 4: 85-94, 1971.

104. Fung, Y. C., Zweifach, B. W. : Microcirculation: Mechanics of Blood Flow in Capillaries. In: Annual Review of Fluid Mechanics. (edited by M. Van Dyke, R. Vincenti), Vol. 3, 180-210, 1971.

105. Fung, Y. C. : Stress-Strain-History Relations of Soft Tissues in Simple Elongation. In: Biomechanics: Its Foundations and Objectives. (edited by Y. C. Fung), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, Chapter 7, 181-208, 1971.

106. Fung, Y. C. : Comparison of different models of the heart muscle. J. Biomech., 4: 289-295, 1971.

107. Yin, F. C. P., Fung, Y. C. : Comparison of theory and experiment in peristaltic transport. J. Fluid Mech., 47: 93-112, 1971.

108. Fung, Y. C. : Muscle controlled flow. Proc. 12th Midwest

Mechanics Conf., Vol. 6, Article 3, 33-62, University of Notre Dame, Fort Wayne, IN, August, 1971. In: Development in Mechanics. University of Notre Dame Press.

109. Fung, Y. C.: Dynamics of the capillary blood flow. Invited Lecture, Proc. Intl. Union of Physiol. Sci., 25th Intl. Congr., Munich, 8: 39-40, 1971.

110. Lee, J. S., Fung, Y. C.: Flow in nonuniform small blood vessels. Microvasc. Res., 3: 272-287, 1971.

111. Lew, H. S., Fung, Y. C.: Peristaltic carrying and mixing of chyme in the small intestine (an analysis of a mathematical model of peristalsis on the small intestine). J. Biomech., 4: 297-315, 1971.

112. Yin, F. C. P., Fung, Y. C.: Mechanical properties of isolated mammalian ureteral segments. Am. J. Physiol., 221: 1484-1493, 1971.

1972

113. Lanir, Y. N., Fung, Y. C.: Fiber composite columns under compression. J. Composite Materials, 6: 387-401, 1972.

114. Sobin, S. S., Fung, Y. C., Tremer, H. M., Rosenquist, T. H.: Elasticity of the pulmonary alveolar microvascular sheet in the cat. Circ. Res., 30: 440-450, 1972.

115. Fung, Y. C., Sobin, S. S.: Elasticity of the pulmonary alveolar sheet. Circ. Res., 30: 451-469, 1972.

116. Fung, Y. C., Sobin, S. S.: Pulmonary alveolar blood flow. Circ. Res., 30: 470-490, 1972. Including an appendix by Y. C. Fung, Yen, R. T., and Mead, E.: Model experiment on the stability of a collapsed Starling resistor in flow at low Reynolds number, ibid, pp. 487-490.

117. Evans, E., Fung, Y. C.: Improved measurements of the erythrocyte geometry. Microvasc. Res., 4: 335-347, 1972.

118. Fung, Y. C.: Theoretical pulmonary microvascular impedance. Annals of Biomedical Engineering, 1: 221-245, 1972.

1973

119. Fung, Y. C.: Stochastic flow in capillary blood vessels. Microvasc. Res., 5: 34-49, 1973.

120. Fung, Y. C.: A theory of elasticity of the lung. J. Appl. Mech., 41, E: 8-14, March, 1974.

121. Rosenquist, T. H., Bernick, S., Sobin, S. S., Fung, Y. C.: The structure of the pulmonary interalveolar microvascular sheet. Microvasc. Res., 5: 199-212, 1973.

122. Fung, Y. C.: Biorheology of soft tissues. Biorheology 10: 139-155, 1973.

123. Chen, P. C. Y., Fung, Y. C.: Extreme value statistics of human red blood cells. Microvasc. Res., 6: 32-43, 1973.

124. Pinto, J. G. Fung, Y. C.: Mechanical properties of the heart muscle. Biomechanics Symposium, ASME AMD-2: 37-42, 1973.

125. Chen, Y. L., Fung, Y. C.: Stress-strain history relations of rahhit mesentery in simple elongation. Biomechanics Symposium, ASME AMD-2: 9-10, 1973.

126. Yen, R. T., Fung, Y. C.: Model experiments on apparent blood viscosity and hematocrit in pulmonary alveoli. J. Appl. Physiol., 35: (4), 510-517, 1973.

127. Fung, Y. C.: Reply to Dr. Iberall. Microvasc. Res., 6: 240-241, 1973.

128. Pinto, J. G., Fung, Y. C.: Mechanical properties of the heart muscle in the passive state. J. Biomech., 6:

597-616, 1973.

129. Pinto, J. G., Fung, Y. C.: Mechanical properties of the stimulated papillary muscle in quick-release experiments. J. Biomech., 6: 617-630, 1973.

1974

130. Fung, Y. C.: Fluid in the interstitial space of the pulmonary alveolar sheet. Microvasc. Res., 7: 89-113, 1974.

131. Lanir, Y., Fung, Y. C.: Two-dimensional mechanical properties of the rabbit skin. I. Experimental system. J. Biomech., 7: 29-34, 1974.

132. Lanir, Y., Fung, Y. C.: Two-dimensional mechanical properties of the rahhit sikn. II. Experimental results. J. Biomech., 7: 171-182, 1974.

133. Vawter, D., Fung, Y. C., Zweifach, B. W.: Distribution of blood flow and pressure from a microvessel into a branch. Microvasc. Res., 8: 44-52, 1974.

134. Tanaka, T. T., Fung, Y. C.: Elastic and inelastic properties of the canine aorta and their variation along the aortic tree. J. Biomech., 7: 357-370, 1974.

135. Fung, Y. C.: Biorheology of loose connective. tissues, especially blood vessels. In 7th Wissenschaftliche Konferenz Deutscher Naturforscher und Aerzte. Biopolymere und Biomechanik von Bindegewebssystemen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974, pp. 191-210. Also in the same volume, p. 533-534, Concluding remarks from the point of view of an engineer.

136. Fung, Y. C.: New areas of bioengineering research. In: Advances in Bioengineering, pp. 26-34, Am. Soc.

Mech. Engrgs, NY, 1974.

1975

137. Schmid-Schoenbein, G. W., Fung, Y. C., Zweifach, B. W.: Vascular endotheliumleukocyte interaction: Sticking shear force in venules. Circ. Res., 36: 173-184, 1975.
138. Tang, H. T., Fung, Y. C.: Fluid movement in a channel with permeable walls covered by porous media: A model of lung alveolar sheet. J. Appl. Mech., 42: 45-50 (Trans. ASME, Vol. 97, Ser. E.), 1975.
139. Fung, Y. C., Tang, H. T.: Solute distribution in the flow in a channel bounded by porous layers (a model of the lung). J. Appl. Mech., 41: 531-535 (Trans. ASME Vol. 97, Ser. E), 1975.
140. Fung, Y. C., Tang, H. T.: Longitudinal dispersion of tracer particles in the blood flowing in a pulmonary alveolar sheet. J. Appl. Mech., 42: 536-540 (Trans. ASME Vol. 97, Ser. E), 1975.
141. Fung, Y. C.: Does the surface tension make the lung inherently unstahle? Circ. Res., 37: 497-502, 1975.
142. Fung, Y. C.: Stress, deformation, and atelectasis of the lung. Circ. Res., 37: 481-496, 1975.
143. Fung, Y. C.: Matematicheski modeli zavicimosti napryayenie deformatsiya dlya yivich myagkich tkaneyi. (On mathematical model of stress-strain relationship for living soft tissues) Mechanika polimerov (polymer mechanics). Latvian SSR, Academy of Science, Riga. 10: 850-867, 1975 (No. 5).
144. Fung, Y. C.: 1975 Eugene M. Landis Award Lecture: Microcirculation as seen by a red cell. Microvasc.

Res., 10: 246-264, 1975.
145. Pinto, J. G., Price, J. M., Fung, Y. C., Mead, E. H.: A device for testing mechanical properties of biological materials-the Biodyne. J. Appl. Physiol., 39: 863-867, 1975.
1976
146. Fung, Y. C.: Interaction of blood cells with vessel walls in microcirculation. Thrombosis Res., 8: Suppl. II, 8: 315-327, 1976.
147. Matsuzaki, Y., Fung, Y. C.: On separation of divergent flow at moderate Reynolds numbers. J. Appl. Mech., 43: 227-231 (Trans. ASME. Vol. 98, Ser. E.), 1976.
148. Fung, Y. C.: Biomechanics. A general lecture presented to the 14th Congress of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Delft Netherlands, on Sept. 1, 1976. In: The Proc. of the Congress, entitled Theoretical and Applied Mechanics. (edited by W. T. Koiter), pp. 7-31, Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1976.
149. Fronek, K., Schmid-Schoenbein, G. W., Fung, Y. C.: A non-contact method for three-dimensional analysis of vascular elasticity in vivo and in vitro. J. Appl. Physiol., 40(No. 4): 634-637, 1976.
150. Fung, Y. C.: On mathematical models of stress-strain relationship for living soft tissues. Translation of Soviet publications, UDC 611.08: 539-4, Plenum Publishing Co., 227 W. 17th St., New York, N.Y. 10011, 1976. (This is the English version of No. 143).
151. Tong, P., Fung, Y. C.: The stress-strain relationship for the

skin. J. Biomech. ,9:649-657,1976.

152. Fung, Y. C. :Blood flow in the lung. In:Recent Advances in Engineering Science. (editor T. S. Chang), Vol. 7, pp. 299-307, Scientific Publishers, Inc. ,Boston, 1976.

1977

153. Fung, Y. C. :Introduction to biophysical aspects of microcirculation. In:Microcirculation. (edited by G. Kaley and B. M. Altura), vol. 1, Chap. 11, pp. 255-278, University Park Press, Baltimore, 1977.

154. Fung, Y. C. :Red blood cells and their deformability. In:Microcirculation. (edited by G. Kaley and B. M. Altura), vol. 1, Chap. 12, pp. 279-298 University Park Press, Baltimore, 1977.

155. Fung, Y. C. :Rheology of blood in microvessels. In:Microcirculation. (edited by G. Kaley and B. M. Altura), vol. 1, Chap. 13, pp. 279-298 University Park Press, Baltimore, 1977.

156. Fung, Y. C. : Rheology of blood vessels. In: Microcirculation. (edited by G. Kaley and B. M. Altura), vol. 1, Chap. 14, pp. 299-324, University Park Press, Baltimore, 1977.

157. Fung, Y. C. , Sobin, S. S. : Mechanics of pulmonary circulation. In:Cardiovascular Flow Dynamics and Measurements. (edited by N. H. C. Hwang and N. A. Norman), Chap. 17, pp. 665 — 730, University Park Press, Baltimore, 1977.

158. Fung, Y. C. , Sobin, S. S. : Pulmonary alveolar blood flow. In: Bioengineering Aspects of Lung Biology. (editor J. B. West), Chap. 4, pp. 267-358 Marcel Dekker, Inc. ,New York, 1977.

159. Yen, R. T., Fung, Y. C.: Inversion of Fahraeus effect and effect of mainstream flow on capillary hematocrit. J. Appl. Physiol., Respiration, Environment and Exercise Physiology, 42(4): 578-586, 1977.

160. Fung, Y. C.: Biomechanics in dentistry. In: The Relevance of Biomedical Engineering to Dentistry, pp. 43-51. U. S. PHS NIH Proc. of the workshop held on Feb. 2-4, 1976. DHEW Pub. No. NIH 77-1198. Superintendent of Documents, Stock. No. 017-047-00023-0.

161. Price, J. M., Patitucci, P., Fung, Y. C.: Mechanical properties of taenia coli smooth muscle in spontaneous contraction. Am. J. Physiol., 233(1): C47-C-55, 1977, or Am. J. Physiol. Cell Biology, 2(1): C47-C55, 1977.

162. Matsuzaki, Y. Fung, Y. C.: Unsteady fluid dynamic forces on a simplesupported circular cylinder of finite length conveying a flow, with applications to stability analysis. J. Sound and vibration, 54(3): 317—330, 1977.

163. Matsuzaki, Y., Fung, Y. C.: Stahility analysis of straight and buckled two-dimensional channels conveying an incompressible flow. Trans. of ASME, vol. 99, J. Appl. Mechanics, 44: Ser. E; 548-552, 1977.

1978

164. Sobin, S. S., Lindal, R. G., Fung, Y. C., Tremer, H. M.: Elasticity of the smallest noncapillary pulmonary blood vessels in the cat. Microvasc. Res., 15: 57-68, 1978.

165. Fung, Y. C., Tong, P., Patitucci, P.: Stress and strain in the lung. American Society of Civil Engineers, J. Eng. Mech. Div., 104(EM1): 201-223, 1978.

166. Fung, Y. C.: Mechanical properties of blood vessels. In: Peripheral Circulation. (edited by P. Johnson), Chap. 2,

45-79, John Wiley and Sons, New York, 1978.

167. Vawter, D. L., Fung, Y. C., West, J. B.: Elasticity of excised dog lung parenchyma. J. Appl. Physiol., 45 (2): 261-269, 1978.

168. Yen, R. T., Fung, Y. C.: Effect of velocity distribution on red cell distribution in capillary blood vessels. Am. J. Physiol., 235(2): H251-H257, 1978.

169. Matsuzaki, Y. Fung, Y. C.: Nonlinear stability analysis of two-dimensional model of an elastic tube conveying a compressible flow. J. Appl. Mech., 46: 31-36, 1979.

170. Fronek, K., Fung, Y. C.: Measurement of biomechanical properties of blood vessels. In: Handbook of Engineering in Medicine and Biology. (edited by B. N. Feinberg and D. G. Fleming), Sec. B, CRC Press, Inc., West Palm Beach, Florida, 1978.

171. Schmid-Schoenbein, G. W., Fung, Y. C.: Forced perturbation of respiratory system. (A) The traditional model. Ann. Biomed. Engrg., 6: 194-211, 1978.

1979

172. Fung, Y. C.: Inversion of a class of nonlinear stress-strain relationships of biological soft tissues. J. Biomech. Engrg., 101: 23-27, 1979.

173. Vawter, D. L., Fung, Y. C., West, J. B.: Constitutive equation of lung tissue elasticity. J. Biomech. Engrg., 101: 38-45, 1979.

174. Schmid-Schoenbein, G. W., Fung, Y. C.: Forced perturbation of respiratory system. (B). A continuum mechanics analysis. Ann. Biomed. Engrg., 6: 367-398, 1978.

175. Price, J. M., Patitucci, P., Fung, Y. C.: Mechanical proper-

ties of resting taenia coli smooth muscle. Am. J. Physiol. ,236:C211-C220,1979.

176. Fung, Y. C. , Fronek, K. , Patitucci, P. : On the choice of mathematical expressions to describe the elasticity of arteries. In: 1979 Biomechanics Symposium . ASME AMD-32: pp. 115-118. American Society of Mechanical Engineers,New York. 1979.

177. Fung, Y. C. , Fronek, K. , Patitucci, P. : Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression. Am. J. Physiol. ,237:H620-H631,1979.

1980

178. Sobin , S. S. , Fung, Y. C. , Lindal, R. G. , Tremer, H. M. , Cleark, L. : Topology of pulmonary arterioles, capillaries, and venules in the cat. Microvasc. Res. , 19: 217-233,1980.

179. Fung, Y. C. :Structural mechanics of microvasculature. In: Mathematics of Microcirculation Phenomena. (edited by J. F. Gross and A. Popel), pp. 1-16, Raven Press, New York, 1980.

180. Yen, R. T. , Fung, Y. C. , Bingham, N. : Elasticity of small pulmonary arteries in the cat. J. Biomech. Engrg. , 102: 170-177, 1980.

181. Fung, Y. C. :On pseudo-elasticity of living tissues. In: Mechanics Today. (edited by S. Nemat-Nasser), vol. 5, pp. 49-66, Pergamon Press, Oxford and New York, 1980.

182. Fronek, K. , Fung, Y. C. : Mechanical properties of arteries as a function of topography and age, Biorheology, 17: 227-234, 1980.

183. Fung, Y. C. : Perspectives of Biomechanics. In: Mekanik

1980. (edited by L. Karlsson), pp. 43-57, Ingenjorsforiaget, Sweden, 1980.

1981

184. Fung, Y. C. : The lung: A perspective of biomechanics development. In: 1980 Advances in Bioengineering. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1980. pp. 11-17. Also J. Biomech. Engrg., 103: 91-96, 1981.

185. Fung, Y. C. : Trends in biomechanics. Proceedings of the Eighth Canadian Congress of Applied Mechanics, Moncton, New Brunswick, Canada. June 7-12, 1981, pp. 15-25.

186. Fung, Y. C., Tsang, W. C. O., Patitucci, P. : High-resolution data on the geometry of red blood cells. Biorheology, 18: 369-385, 1981.

187. Wall, R. J., Sobin, S. S., Karspeck, M., Lindal, R. G., Tremer, H. M., Fung, Y. C. : Computer derived image compositing. J. Appl. Physiol.: Respirat. Environ. Exercise Physiol., 51(1): 84-89, 1981.

188. Fung, Y. C., Sobin, S. S. : The retained elasticity of elastin under fixation agents. J. Biomech. Engrg., 103: 121-122, 1981.

189. Fung, Y. C. : Contribution of applied mechanics to bioengineering. Essays on Contributions of Applied Mechanics to Engineering and Applied Science, (ed. by J. T. Fong), ASME. Published by Division of Applied Mechanics, Stanford University, 1981.

190. Fung, Y. C. : Biological flow in deformable vessels. In: Advances in Fluid Mechanics, Proc. of a Conference held in Aachen, Germany, March 26-28, 1980. Springer-

Verlag, New York, 1981, pp. 291-313.

191. Fung, Y. C.: Recent work on the mechanics of blood vessels. Shanghai Mechanics, 2: 68-73, 1981.

192. Chuong, C. J., Fung, Y. C.: Three-dimensional stress distribution in arteries under the assumptions of incompressibility and homogeneity. In: 1981 Biomechanics Symposium, ed. by Van Buskirk, W. C., and Woo, S. L-Y, AMD-43, pp. 125-218. The American Society of Mechanical Engineers. New York, 1981.

1982

193. Sobin, S. S., Fung, Y. C., Tremer, H. M.: The effect of incomplete fixation of elastin on the appearance of pulmonary alveoli. J. Biomech. Engrg., 104: 68-71, 1982.

194. Fung, Y. C.: Biorheology in the analysis of the lung. Biorheology, 19: 79-94, 1982.

195. Fung, Y. C.: Perspectives of soft tissue mechanics. In: Biomechanics: Principles and Applications. (edited by R. Huiskes, D. Van Campen, J. de Wijn), pp. 94-114, Martinus Nijhoff, Hage/Boston, 1982.

196. Fung, Y. C., Sobin, S. S.: On the constitutive equation of the lung tissue. In: 1982 Advances in Bioengineering. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1982, pp. 67-69.

197. Chuong, C. J., Fung, Y. C.: Radial compression experiments of arterial wall. In: 1982 Advances in Bioengineering. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1982, pp. 67-69.

198. Zhuang, Feng-Yuan, Fung, Y. C.: Pulmonary blood flow in zone 3. In: 1982 Advances in Bioengineering. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1982, pp.

43-45.

199. Zupkas, P. F., Fung, Y. C.: Measurement of active contractions of isolated ureter segments. In: 1982 Advances in Bioengineering. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1982, pp. 135-138.

1983

200. Fung, Y. C., Sobin, S. S., Tremer, H., Yen, R. T., Ho, H. H.: Patency and compliance of pulmonary veins when airway pressure exceeds blood pressure. J. Appl. Physiol.: Respirat. Environ. Exer. Physiol., 54: 1538-1549, 1983.

201. Yen, R. T., Zhuang, F. Y., Fung, Y. C., Ho, H. H., Tremer, H., Sobin, S. S.: Morphometry of cat pulmonary venous tree. J. Appl. Physiol.: Respirat. Environ. Exer. Physiol., 55: 236-242, 1983.

202. Chuong, C. J., Fung, Y. C.: Three-dimensional stress distribution in arteries. J. Biomech. Engrg., 105: 268-274, 1983.

203. Zhuang, F. Y., Fung, Y. C., Yen, R. T.: Analysis of blood flow in cat's lung with detailed anatomical and elasticity data. J. Appl. Physiol.: Respirat. Environ. Exer. Physiol., 55: 1341-1348, 1983.

204. Fung, Y. C.: On the foundations of biomechanics. J. Appl. Mech., 105: 1003-1009, 1983.

1984

205. Chuong, C. J., Fung, Y. C.: Compressibility and constitutive equation of arterial wall in radial compression experiments. J. Biomech., 17: 35-40, 1984.

206. Yen, R. T., Zhuang, F. Y., Fung, Y. C., Ho, H. H., Tremer, H., Sobin, S. S.: Morphometry of cat's pulmonary arte-

rial tree. J. Biomech. Engrg., 106: 131-136, 1984.

207. Fung, Y. C.: Structure and stress-strain relationship of soft tissues. Am. zool., 24: 13-22, 1984.

208. Fung, Y. C., Yen, M. R. T., Sobin, S. S.: Recent contributions to pulmonary circulation research. Biomechanica, 15-16: 6-19, 1984. Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria.

209. Fung, Y. C.: What principle governs the stress distribution in living organs. In: Biomechanics in China, Japan, and USA, Proc. of an Intern. Conf. held in Wuhan, China, in May, 1983. (ed. by Y. C. Fung, E. Fukada, J. J. Wang) pp. 1-13, Published by Science Press. Beijing, China, 1984.

210. Yen, R. T., Fung, Y. C., Zhuang, F. Y., Zeng, Y. J.: Comparison of theory and experiments of blood flow in cat's lung. In: Biomechanics in China, Japan, and USA, ibid., pp. 240-253. Science Press, Beijing, China, 1984.

211. Seguchi, Y., Fung, Y. C., Maki, H.: Computer simulation of dynamics of fluid/gas-tissue systems due to discretization procedure and its application to respiratory dynamics. In: Biomechanics in China, Japan, and USA. (ed. by Y. C. Fung, E. Fukada, and J. J. Wang) Science Press, Beijing, China, pp. 224-239, 1984.

1985

212. Fung, Y. C., Seguchi, Y.: Mechanics applied to living systems. (In Japanese). J. Japan Soc. of Mech. Engrs., 88: 290-296, 1985.

213. Zhuang, F. Y., Yen, M. R. T., Fung, Y. C., Sobin, S. S.: How many pulmonary alveoli are supplied by a single arteriole and drained by a single venule? Microvasc.

Res., 29: 18-31, 1985.

214. Fung, Y. C.: The application of biomechanics to the understanding and analysis of trauma. In: The Mechanics of Trauma. (edited by A. M. Nahum, and J. Melvin) Appleton-Century Crofts, Norwalk, Conn., pp. 1-16, 1985.

215. Lee, S., Fung, Y. C., Matsuda, M., Xue, H., Schneider, D., Han, K.: The development of mechanical strength of surgically anastomosed arteries sutured with dexon. J. Biomech., 18: 81-89, 1985.

216. Zupkas, P. F., Fung, Y. C.: Active contractions of ureteral segments. J. Biomech. Engrg., 107: 62-67, 1985.

217. Waldman, L. K., Fung, Y. C.; Covell, J. W.: Transmural myocardial deformation in the canine left ventricle. Normal in vivo three-dimensional finite strains. Circ. Res., 57: 152-163, 1985.

218. Lee, M. C., LeWinter, M. M., Freeman, G., Shabetai, R., Fung, Y. C.: Biaxial mechanical properties of the pericardium in normal and volume overload dogs. Am. J. Physiol., 249 (Heart Circ. Physiol.), 18: H222-H230, 1985.

219. Dai, K., Xue, H., Dou, R., Fung, Y. C.: On the detection of messages carried in arterial pulse waves. J. Biomech. Engrg., 107: 268-273, 1985.

220. Yen, R. T., Fung, Y. C.: Thoracic trauma study: rib markings on the lung due to impact are marks of collapsed alveoli, not hemorrhage. J. Biomech. Engrg., 107: 291-292, 1985.

221. Fung, Y. C.: Biomechanics. Article 1 of Research Trend in Solid Mechanics. Appl. Mech. Rev., 38: 1251-1255,

1985.

222. Fung, Y. C. Theory, experiment, collecting data, and finding new ideas. In: 1985 Biomechanics Symposium, ASME AMD-68:, FED vol. 21, pp. 1-8. American Society of Mechanical Engineering, New York, 1965. Also in Forum on Unsteady Flows in Biological Systems. AMSE, pp. 1-8, 1985.

223. Seguchi, Y., Fung, Y. C., Ishida, T., Nagatani, H.: Computer simulation of respiratory dynamics. XIV ICMBE and VII ICMP, pp. 1-2, Espoo, Finland, 1985.

1986

224. Fung, Y. C.: Foreword to Frontiers in Biomechanics. In: Frontiers in Biomechanics. (ed. by G. W. Schmid-Schonhein, S. L.-Y. Woo, B. W. Zweifach), pp. v-vii, Springer Verlag, New York, 1986.

225. Rodarte, J. R., Fung, Y. C.: Distribution of stresses within the lung. In: Handbook of Physiology. Sec. 3, The Respiratory System, vol. 3, Part 1, (ed. by A. P. Fishman, P. T. Macklem, J. Mead), pp. 233-246. American Physiological Society. Distributed by Williams and Wilkins, Baltimore, 1986.

226. Seguchi, Y., Fung, Y. C., Ishida, T.: Respiratory dynamics-computer simulation. In: Frontiers in Biomechanics. (ed. by G. W. Schmid-Schobein, S. L.-Y. Woo, B. W. Zweifach), Springer Verlag, New York, pp. 377-391, 1986.

227. Chuong. C. J., Fung, Y. C.: Residual stress in arteries. In: Frontiers in Biomechanics. (ed. by G. W. Schmid-Schobein, S. L.-Y. Woo, B. W. Zweifach), Springer Verlag, New York, pp. 117-129, 1986.

228. Fung, Y. C., Zhuang, F. Y.: An analysis of the sluicing gate in pulmonary blood flow. J. Biomech. Engrg., 108: 175-182, 1986.

229. Chuong, C. T., Fung, Y. C.: On residual stresses in arteries. J. Biomech. Engrg., 108: 189-192, 1986.

230. Fung, Y. C., Yen, R. T.: A new theory of pulmonary blood flow in zone 2 condition. J. Appl. Physiol., 60: 1638-1650, 1986.

231. Yen, R. T., Fung, Y. C., Ho, H. H., Butterman, G.: Speed of stress wave propagation in lung. J. Appl. Physiol., 61 (2): 701-705, 1986.

232. Shoemaker, P. A., Schneider, D., Lee, M. C., Fung, Y. C.: A constitutive model for two-dimensional soft tissues and its application to experimental data. J. Biomechanics, 19(9): 695-702, 1986.

233. Fung, Y. C.: Update of "Biomechanics: Its scope, history, and some problems of continuum mechanics in physiology", (AMR 21 (1968): 1-20). In Applied Mechanics Update 1986, pp 31-57. American Society of Mechanical Engineers. New York, 1986.

234. Fung, Y. C.: Poiseuille Gold Medal Award Lecture: New Trend in Biorheology. Biorheology, 232: 573-587, 1986. Introduction pp. 565-567, Laudatio, pp. 567-572.

1987

235. Fung, Y. C.: Mechanics of Soft Tissues. In Handbook of Bioengineering. (R. Skalak, S. Chien, eds.). McGraw-Hill, New York. 1987. pp. 1.1-1.12.

236. Tao, Z. L. and Fung, Y. C.: Lungs under cyclic compression and expansion. J. Biomechanical Engineering. 109: 160

-162, 1987.

237. Zeng, Y. J., Yager, D., and Fung, Y. C.: Measurement of the mechanical properties of the human lung tissue. J. Biomechanical Engineering. 109: 169-174, 1987.

238. Fung, Y. C., Yen, R. T., and Sobin, S. S.: Models of the pulmonary hemodynamics based on anatomic and functional data. In The Pulmonary Circulation in Health and Disease. (J. A. Will, C. A. Dawson, E. K. Weir, C. K. Buckner eds.). Academic Press, New York, 1987, pp. 199-213.

239. Lee, M. C., Fung, Y. C., Shabetai, R., and LeWinter, M. M.: Biaxial mechanical properties of human pericardium and canine comparisons. Am. J. Physiol. 253 (Heart Circ. Physiol. 22): H75-H82, 1987.

240. Fung, Y. C.: Validation of a theory of blood flow in the lung. In: Physiological Fluid Dynamics II, Proc. of the 2nd Intern. Conf. on physiol. Fluid Dynamics, Indian Inst. of Tech., Madras, Aug. 10-12, 1987. (ed. by Megha Singh and L. S. Srinath). Tata McGraw-Hill Pub. Co., New Delhi, pp. 19-25.

241. Matsuda, M., Fung, Y. C., and Sobin, S. S.: Collagen and elastin fibers in human pulmonary alveolar mouths and ducts. J. Appl. Physiol. 63(3): 1185-1194, 1987.

242. Yen, M. R. T., Fung, Y. C., and Artaud, C.: The incremental elastic moduli of the lungs of rabbit, cat and man. The 1987 Advances in Biomechanics American Society of Mechanical Engineers, New York, 1987, pp. 39-40.

1988

243. Fung, Y. C., Yen, R. T., Tao, Z. L., and Liu, S. Q.: A hypothesis on the mechanism of trauma of lung tissue

subjected to impact load. J. Biomechanical Engineering 110:50-56,1988.

244. Liu, S. Q. and Fung, Y. C.: Zero-stress states of arteries. J. Biomechanical Engineering 110:82-84,1988.

245. Sobin, S. S., Fung, Y. C., Tremer, H. M.: Collagen and elastin fibers in human pulmonary alveolar walls. J. Appl. Physiol. 64(4):1659-1675, 1988.

246. Fung, Y. C.: A model of the lung structure and its validation. J. Appl. Physiol. 64(5):2132-2141, 1988.

247. Fung, Y. C.: Microrheology and constitutive equation of soft tissue. Biorheology 25:261-270, 1988.

248. Fung, Y. C.: Nonlinear mechanics of the lung. Mathematical Biosciences 90:211-220, 1988.

249. Yen, R. T., Fung, Y. C. and Liu, S. Q.: Trauma of lung due to impact load. J. Biomechanics 21:745-753, 1988.

250. Fung, Y. C.: Cellular growth in soft tissues affected by the stress level in service. In Tissue Engineering. (Edited by R. Skalak and C. F. Fox) Alan Liss, Inc., New York, 1988. pp. 45-50.

1989

251. Xue, H. and Fung, Y. C. Persistence of asymmetry in nonaxisymmetric entry flow in a circular cylindrical tube and its relevance to arterial pulse wave diagnosis. J. Biomechanical Engineering, Vol. 111, pp. 37-41, 1989.

252. Xue, H. and Fung, Y. C. What Nei Jing and Mai Jing say about arterial pulse waves and our attempt to illustrate some of their statements. Technical Brief, Journal of Biomechanical Engineering, vol. 111, pp. 88-91.

253. Fung, Y. C. Engineering Mechanics and the Development of the Western Area of China. Advances in Mechanics

19(1):1-4,1989. In Chinese,工程力学如何为开发中国西部做贡献。力学进展杂志,19期一号,1-4页,1989。

254. Fung,Y.C. and Sobin,S.S.,The connection of micro and macro-mechanics:Weaving collagen and elastin fibers into pulmonary alveoli. In Progress and New Directions of Biomechanics, Proceedings of the Second Japan-USA-China Conference on Biomechanics held in Osaka,on Sept. 28-Oct. 2,1987(edited by Y.C. Fung, K. Hayashi, and Y. Seguchi). MITA Press, Tokyo,Japan 1989. pp. 161-170.

255. Fung, Y. C.: Connecting incremental shear modulus and Poisson's ratio of lung tissue with morphology and rheology of microstructure. Biorheology 26: 279-289,1989.

256. Fung,Y.C.:In search of a biomechanical foundation of tissue engineering. In Tissue Engineering,1989,(edited by S. L-Y. Woo and Y. Seguchi), pp. 11-14, ASME New York,Pub. No. BED-Vol. 14,1989.

257. Seguchi,Y.,Wada,S.,Fung,Y.C. and Tanaka,M.:Simulation of combined breathing and ventilation of a lung. In Progress and New Directions of Biomechanics, (ed. by Y. C. Fung, K. Hayashi, and Y. Seguchi). MITA Press,Tokyo,Japan 1989,pp. 171-181.

258. Fung, Y. C.:Connection of Micro-and Macromechanics of the Lung. In Microvascular Mechanics:Hemodynamics of Systemic and Pulmonary Microcirculation (ed. by J.S. Lee and T.C. Skalak). Springer-Verlag,New York. Ch. 13,pp 191-217,1989.

259. Fung,Y.C. and Liu,S.Q.:Change of residual strains in arteries due to hypertrophy caused by aortic constric-

tion. Circulation Res. 65:1340-1349,1989.

260. Liu, S. Q. and Fung, Y. C.: Relationship between hypertension, hypertrophy, and opening angle of zero-stress state of arteries following aortic constriction. J. Biomechanical Engineering 111:325-335, 1989.

261. Fung, Y. C.: 力学的远景. Prospect of Mechanics. International Symposium on Mechanics in the Next 15 Years. Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, China. 1989, pp. 17-20.

1990

262. Omens, J. H. and Fung, Y. C.: Residual strain in rat left ventricle. Circulation Research 66(1):37-45, 1990.

263. Fung, Y. C.: Functional morphometry and modeling of pulmonary vasculature. Proceedings of the 9th Veterinary Respiratory Symposium, held on Oct. 6-8, 1990 in Orlando, FL. The Comparative Respiratory Society.

264. Fung, Y. C.: How does the baby catch its first breaths? In: Engineering Science, Fluid Dynamics. (Yates, G. T., ed.). World Scientific Publishing Co., Singapore, 1990. pp. 135-145.

265. Fung, Y. C.: A new trend in biomechanics research. Keynote plenary lecture. 6th International Conference on Biomedical Engineering. Dec. 6-8, 1990, Singapore. Proceedings, pp. 1-6.

1991

266. Xie, J. P., Liu, S. Q., Yang, R. F. and Fung, Y. C.: The zero-stress state of rat veins and vena cava. J. Biomechanical Engineering 113:36-41, 1991.

267. Fung, Y. C.: Dynamics of blood flow and pressure-flow rela-

tionship. In The Lung: Scientific Foundations, ed. by R.G. Crystal and J.B. West. Raven Press, New York, Chapter 5.2.2, pp. 1121-1134, 1991.

268. Han, H.C. and Fung, Y.C.: Residual strains in porcine and canine trachea. J. Biomechanics 24: 307-315, 1991.

269. Fung, Y.C.: The future of biomechanics. In "A New Horizon on Medical Physics and Biomedical Engineering", (ed. by H. Abe, K. Atsumi, et al). Elsevier, Amsterdam, pp. 3-10, 1991.

270. Fung, Y.C., and Liu, S.Q.: Changes of zero-stress state of rat pulmonary arteries in hypoxic hypertension. J. Appl. Physiol. 70(6): 2455-2470, 1991.

271. Fung, Y.C.: Inflation and atelectasis in a topographical model of the lung. In: New Aspects on Respiratory Failure (ed. by E. Rugheimer), pp. 157-171. Springer Verlag, Berlin, 1991.

272. Fung, Y.C.: What are the residual stresses doing in our blood vessels? ALZA and Christie Distinguished Lecture presented to the Biomedical Engineering Society on Monday, March 20, 1989, New Orleans, Louisiana. Annals of Biomedical Engineering 19(3): 237-249, 1991.

273. Han, H.C. and Fung, Y.C.: Species dependence on the zero-stress state of aorta: pig vs rat. J. Biomechanical Engineering 113: 446-451, 1991.

274. Fung, Y.C.: On the definition of bioengineering and the domain of biomechanics. Chinese Journal of Medical and Biological Engineering, 11: 137-141. In Chinese, 生物工程之定义与生物力学之领域，中华医学工程学刊十一卷二期

1992

275. Liu, S. Q. and Fung, Y. C.; Influence of STZ-induced diabetes on zero-stress states of rat pulmonary and systemic arteries. Diabetes 41:136-146, 1992.

276. Fung, Y. C. and Liu, S. Q.; Strain distribution in small blood vessels with zero-stress state taken into consideration. American J. Physiology: Heart and Circulatory Physiology, 262(2): H544-H552, 1992.

277. Sobin, S. S. and Fung, Y. C.; Response to challenge to the Sobin-Fung approach to the study of pulmonary microcirculation. Chest 101(4): 1135-1143, 1992.

278. Yager, D., Feldman, H., and Fung, Y. C.; Microscopic vs macroscopic deformation of the pulmonary alveolar duct. J. Applied Physiology 72(4): 1348-1354, 1992.

279. Debes, J. C. and Fung, Y. C.; Effect of temperature on the biaxial mechanics of excised lung parenchyma of the dog. J. Appl. Physiol. 73: 1171-1180, 1992.

280. Liu, S. Q. and Fung, Y. C.; Changes in the rheological properties of blood vessel tissue remodeling in the course of development of diabetes. Biorheology, 29: 443-457, 1992.

1993

281. Fung, Y. C. and Liu, S. Q.; Elementary mechanics of the endothelium of blood vessels. J. Biomechanical Engineering, 115: 1-12, 1993.

282. Dong, C., Mead, E., Skalak, R., Fung, Y. C., Debes, J. C., Zapata-Sirvent, R. L., Andree, C., Greenleaf, G., Cooper, M., and Hansbrough, J. F.; Development of a device for measuring adherence of skin grafts to the wound surface. Annals of Biomedical Engineering, 21: 51-55, 1993.

参考文献

[1]COTTRELL, A. H., The Mechanical Properties of Matter. New York: Wiley, 1964.

[2]FUNG, Y. C., Foundations of Solid Mechanics. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1965.

[3]FUNG, Y. C., "Elasticity of Soft Tissues in Simple Elongation." Am. J. Physiol. 213(6): 1532-1544, 1967.

[4]FUNG, Y. C., "Stress-Strain-History Relations of Soft Tissues in Simple Elongation." In Biomechanics: Its Foundations and Objectives, Ed. by Y. C. Fung, N. Perrone, and M. Anliker, N. J., Prentice-Hall, 1971.

[5]FUNG, Y. C., "Biorheology of soft Tissues." Biorheology 10: 139-155, 1973.

[6]FUNG, Y. C., FRONEK, K., AND PATITUCCI, P., "Pseudoelasticity of Arteries and the Choice of Its Mathematical Expression." Am. J. Physiol. 237: H620-H631, 1979.

[7]FUNG, Y. C., Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. New York: Springer—Verlag, 1981, 2nd edit, 1993

[8]FUNG. Y. C., "A Model of the Lung Structure and Its Validation." J. Appl. Physiol. 64(5): 2132-2141, 1988.

[9]FUNG, Y. C., Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth. New York: Springer-Verlag, 1990.

[10]GREEN, A. E., AND ADKINS, J. E., Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics. Oxford: Oxford University Press, 1960.

[11]HAYASHI, K., HANDA, H., MORI, K., AND MORI-

TAKE, K., "Mechanical Behavior of Vascular Walls." J. Soc. Material Science Japan 20:1001-1011, 1971.

[12]LI, YUAN-HUI, "Equation of State of Water and Sea Water." J. Geophys. Res. 72(10):2665-2678, 1967.

[13]MATSUDA, M., FUNG, Y. C., AND SOBIN, S. S., "Collagen and Elastin Fibers in Human Pulmonary Alveolar Mouths and Ducts." J. Appl. Physiol. 63(3): 1185-1194, 1987.

[14]PATEL, D. J., AND VAISHNAV, R. N., "The Rheology of Large Blood Vessels." In Cardiovascular Fluid Dynamics, Vol. 2, edited by D. H. Bergel (pp. 2-64). New York: Academic Press, 1972.

[15]SOBIN, S. S., FUNC, Y. C., AND TREMER, H. M., "Collagen and Elastin Fibers in Human Pulmonary Alveolar Walls." J. Appl. Physiol. 64(4): 1659-1675, 1988.

[16]TAIT, P. G., "Report on Some of the Physical Properties of Fresh Water and Sea Water." Report on Scientific Results of Voy. H. M. S., Challenger, Phys. Chem., 2, 1-76, 1888.

[17]TANNER, R. I., Engineering Rheology. Oxford: Oxford University Press, 1988.